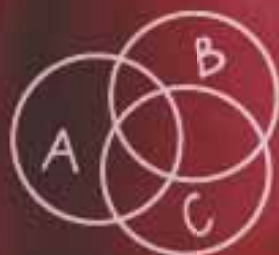


$$P = 6a^2$$



МАТЕМАТИКА

ЗА СЕДМО ОДДЕЛЕНИЕ
ВО ОСНОВНОТО
ОБРАЗОВАНИЕ

7

УЧЕБНИК



$$3x + 4 = 6x + 1$$

$$3x - 6x = 1 - 4$$

$$-3x = -3$$

$$9^2 = 81$$



Д-р Валентина Гоговска | Снежана Ристовска

МАТЕМАТИКА

ЗА СЕДМО ОДДЕЛЕНИЕ
ВО ОСНОВНОТО
ОБРАЗОВАНИЕ

7

УЧЕБНИК



МАТЕМАТИКА 7, учебник за седмо одделение во основно образование

Авторски права © 2025 АЛБИ ДОО, Скопје

Издавач:

Друштво за издавачка дејност, производство, промет и услуги АЛБИ ДОО, Скопје

Уредник:

Елена Стефановска

Автори:

Д-р Валентина Гоговска
Снежана Ристовска

Лектор:

Ивана Кузмановска

Ликовно и графичко обликување

Паблик дипломаси Скопје

Печати:

ПОЛИЕСТЕРДЕЈ ДООЕЛ Скопје

Тираж:

14500

Сите права се задржани. Ниту еден дел од оваа книга не смее да биде препечатувач или пренесуван во каква било форма или со какви било средства, електронски или механички, вклучувајќи и фотокопирање, документирање или да биде зачуван во систем за повторно пронаоѓање без писмена согласност од издавачот.

Овој учебник е одобрен за употреба во деветгодишно основно образование, со Одлука за одобрување и употреба на учебник по наставниот предмет Математика за VII одделение во основно образование број 26-913/1 од 22.08.2025, Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија

CIP - Каталогизација во публикација Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)

ГОГОВСКА, Валентина

Математика 7 : учебник за седмо одделение во основно образование / Валентина Гоговска, Снежана Ристовска. - Скопје : АЛБИ, 2025 (Скопје : ПОЛИЕСТЕРДЕЈ).

- 384 стр. : илустр. ; 195x265 мм

ISBN 978-608-241-054-8

COBISS.MK-ID 66752517

ВОВЕД

Драги ученици,

Добредојдовте во авантурата наречена математика за седмо одделение!

Овој учебник е ваш водич низ светот на броевите, формулите и задачите. Математиката понекогаш може да изгледа тешка, но со љубопитност, работа и труд ќе откриете дека истовремено е интересна и корисна.

Секоја лекција ќе ве води чекор по чекор – потсетувајќи ве на она што веќе го знаете и надградувајќи ве со нови знаења, примери и задачи од секојдневниот живот. Ве очекуваат предизвици што ќе ја развиваат вашата логика, креативност и самостојно размислување. Не плашете се од грешките – тие се дел од учењето.

Покрај тоа, ќе имате можност да користите и дигитални алатки за полесно и поинтересно вежбање.

Математиката не е само училиштен предмет – таа е начин на размислување и разбирање на светот. Бидете храбари, поставувајте прашања и уживајте во оваа математичка авантура!

Ви посакуваме успех и среќа.

Од авторскиот тим

Содржина

Тема 1: Броеви и операции со броеви

Операции со множества.....	9
Својства на операциите пресек и унија на множества.....	16
Множество од подредени парови.....	21
Цели броеви. Споредување и подредување.....	26
Апсолутна вредност.....	31
Собирање на цели броеви со исти или различни знаци.....	36
Својства на операцијата собирање на цели броеви.....	42
Равенки од видот $x + a = b$. Одземање на цели броеви.....	46
Множење на цели броеви.....	50
Својства на операцијата множење на цели броеви.....	55
Делење на цели броеви.....	59
Вредност на броен израз.....	63
Степен со показател природен број.....	68
Квадрати и квадратни корени до 100.....	73
Споредување на дропки.....	77
Периодични децимални броеви.....	82
Опишување, пресметување и споредување делови од целината со дропки и проценти.....	86
Собирање на дропки.....	90
Одземање на дропки.....	94
Множење на дропки.....	98
Делење на дропки.....	103
Собирање и одземање на децимални броеви со различен број на децимали.....	108
Множење и делење на децимални броеви.....	112
Врска меѓу размер и дел од целина.....	117
Примена на правопрпорционалност во реални ситуации.....	121

Тема 2: Геометрија

Кружница и круг.....	125
Тангента на кружница.....	133
Графичко собирање и одземање на отсечки.....	136
Конструирање паралелни и нормални прави и симетрала на отсечка.....	142
Конструкција на геометриски елементи со образовен софтвер.....	148
Основни поими за агли и полурамнини.....	152
Мерење, проценување и цртање агли.....	157
Централен агол.....	162
Операции со агли.....	168
Графичко собирање и одземање на агли.....	173
Конструкција на симетрала на агол и агли од 60° , 30° , 15° , 90° , 45°	177
Трансверзали и паралелни прави.....	182
Конвексни и неконвексни многуаголници.....	186
Основни поими за триаголници.....	190
Конструкција на триаголници.....	194

Конструкција на опишана и на впишана кружница на триаголник	199
Четириаголници и класификација според паралелност на страните	203
Збир на агли во четириаголник	208
Паралелограм и својства на паралелограм	211
Видови паралелограми и нивните својства	217
Осна симетрија во координатен систем	223
Транслација во координатен систем	228
Ротација на многуаголници и примена	233
Претставување 3Д-форми во различни проекции	237

Тема 3: Алгебра

Основи на алгебрата. Членови, изрази и равенки	241
Упростување на линеарен израз. Пресметување вредност	247
Формули. Изразување на една променлива преку друга	251
Линеарна равенка со една непозната. Решение на равенка	255
Низи од цели броеви	259
Претставување едноставни функции	264
Графички приказ на линеарна функција и координатни парови	268
Графици на линеарни функции паралелни на x – или y -оската	273

Тема 4: Мерење

Мерни инструменти за должина и мерни единици. Микрон	277
Мерни инструменти за маса и претворање на мерни единици за маса	285
Мерење и мерни единици за зафатнина	289
Време. 12-часовен и 24-часовен систем	294
Пресметување временски интервали и работа со графици	302
Периметар на триаголник и на четириаголник	310
Плоштина на сложени 2Д-форми	317
Волумен и мерни единици за волумен	321
Волумен на квадар и на коцка	326
Пресметување плоштина на коцка и на квадар од нивните мрежи	330

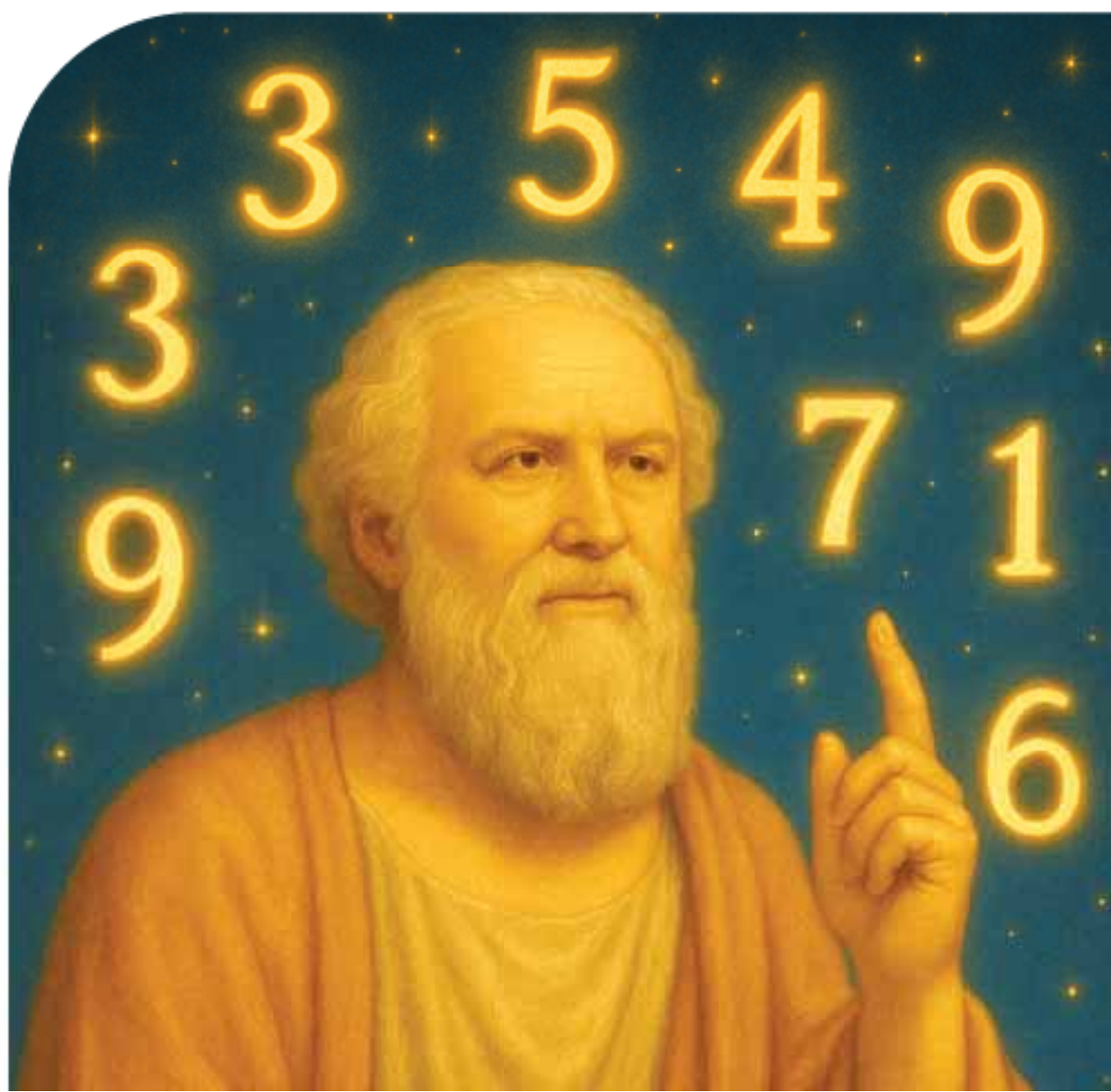
Тема 5: Работа со податоци

Планирање на истражување	335
Собирање и организирање на податоци за истражување	342
Столбест и кружен дијаграм	347
Цртање и толкување на линиски дијаграм и пиктограм	353
Модална класа и дијаграм на фреквенција за групирани податоци	360
Процена и пресметка на аритметичка средина. Споредба на две множества на податоци	366
Исходи. Веројатност	373
Експериментална и теоретска веројатност	378

Т Е М А

1

БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ



Платоновата Академија и магијата на броевите

Во Античка Грција, во Платоновата Академија, бројот не бил само средство за броење, туку нешто свето, возвишено. Платон и неговите ученици верувале дека сè е број – секој дел од природата, од музиката до движењето на планетите, може да се разбере преку броеви. Броевите, за Платон, не биле само апстракции, туку биле совршени идеи, вечни и непроменливи.

Дури и кога не ги гледаме, броевите постојат. Тие симболизираат ред, логика и хармонија во природата и во човечката мисла.

„Кога разбирате како се поврзуваат броевите, математиката станува како мапа што ве води кон решението.“

Резултати од учењето

По изучувањето на оваа тема ќе бидеш способен/а да:

- ги применуваш операциите со множества во решавање проблеми;
- применуваш цели броеви и апсолутна вредност на цел број во секојдневен контекст;
- користиш аритметички закони и инверзни операции за да се поедностават пресметувањата со цели броеви;
- користиш степени со показател природен број и квадратен корен на одредени природни броеви во решавање проблеми;
- користиш врска меѓу дробки, децимални броеви и проценти при решавање проблеми од секојдневен контекст;
- решаваш проблеми од секојдневен контекст со операции со позитивни рационални броеви;
- решаваш проблеми со размер и правопрпорционалност.

Операции со множества

Во оваа лекција ќе научиш како да извршуваш различни операции со множества кои ќе ти помогнат да разбереш како различни групи на елементи можат да се поврзат или разликуваат меѓусебно.

Преку примери и задачи ќе откриеш како се применуваат множествата во математиката и во реалниот живот, како што се организирање податоци, анализирање заеднички карактеристики и донесување логички заклучоци.



Пример 1

Во училишниот двор, учениците од три различни паралелки сакаат да играат различни спортови. Според спортот што го играат, распоредени се во следните множества:

- Ученици кои играат фудбал се елементи на множеството A ; $A = \{\text{Ана, Марко, Тина}\}$
- Ученици кои играат кошарка се елементи на множеството B ; $B = \{\text{Тина, Петар, Мартин}\}$
- Ученици кои играат одбојка се елементи на множеството C ; $C = \{\text{Ана, Мартин, Лана}\}$

- а) Кои ученици припаѓаат на множество A ?
- б) Кои ученици припаѓаат на множество B , а не припаѓаат на A ?
- в) Кои ученици сакаат да играат и фудбал и кошарка?
- г) Запиши по едно подмножество од A и од B .
- д) Кои ученици не играат ниту еден од овие спортови ако знаеме дека во училишниот двор се учениците од следното множество $\{\text{Ана, Марко, Тина, Петар, Мартин, Јана, Лука, Лана}\}$?

Решение:

- а) Учениците кои припаѓаат на множество A (кои сакаат да играат фудбал) се: Ана, Марко, Тина, или може да запишеме $\text{Ана} \in A$, $\text{Марко} \in A$ и $\text{Тина} \in A$.
- б) Учениците кои припаѓаат на множество B (кои сакаат да играат кошарка) се: Тина, Петар, Мартин, или $\text{Тина} \in B$, $\text{Петар} \in B$ и $\text{Мартин} \in B$.
Од овие ученици не играат фудбал, односно не припаѓаат на A : Петар и Мартин, или може да запишеме $\text{Петар} \notin A$, $\text{Мартин} \notin A$.
- в) Ученик кој игра и фудбал и кошарка е само Тина.
- г) Подмножество од A е множеството $A_1 = \{\text{Тина}\}$ и може да запишеме $A_1 \subset A$.
Подмножество од B е множеството $B_1 = \{\text{Тина, Петар}\}$, $B_1 \subset B$.
Секако има и други подмножества, но се бараше само по едно, кое било.
- д) Учениците кои не играат ниту еден од овие спортови ќе ги добиеме кога од множеството на сите ученици што се во дворот $S = \{\text{Ана, Марко, Тина, Петар, Мартин, Јана, Лука}\}$ ќе ги исклучиме учениците што сакаат барем еден спорт. Лука и Лана не играат ниту еден од овие спортови.

Задача 1

Претстави ги со Венов дијаграм множествата: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Пример 2

За даден училиштен проект, учениците требало да направат истражување со цел да дознаат колкав е интересот за спортски, уметнички и други воннаставни активности. Како резултат на истражувањето ги добиле следните множества:

Ученици кои учествуваат во спортски активности, се елементи на множество $A = \{\text{Марија, Лука, Јана, Петар, Тина}\}$.

Ученици кои учествуваат во уметнички активности, се елементи на множество $B = \{\text{Лука, Тина, Стефан, Ана, Јана}\}$.

- Кои ученици учествуваат и во спортски и во уметнички активности?
- Запиши ги елементите на пресекот на множествата A и B користејќи го знакот за операцијата пресек на множества $A \cap B$.
- Прикажи го пресекот на множествата A и B со Венов дијаграм.

Решение:

- Учениците кои учествуваат и во спортски и во уметнички активности се: Лука, Јана, Тина. Можеме со C да го означиме множеството во кое припаѓаат учениците од A и B , $C = \{\text{Лука, Јана, Тина}\}$. Множеството C го викаме пресек на множествата A и B .

Пресек на две множества е множеството составено од заедничките елементи на двете множества. Со други зборови, ако се дадени две множества A и B , тогаш нивниот пресек, означен со $A \cap B$, е множеството $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

- Во нашиот пример пресекот на множествата A и B , користејќи го знакот за операцијата пресек на множества $\cap$, ќе го запишеме:
 $A \cap B = C = \{\text{Лука, Јана, Тина}\}$.

- Пресекот на множествата е даден со Венов дијаграм.

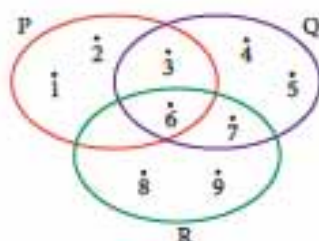


Две множества A и B кои немаат заеднички елементи, односно за кои $A \cap B = \emptyset$, се дисјунктни множества.

Задача 2

Користејќи го цртежот каде што со Венов дијаграм се претставени множествата P, Q и R, запиши ги множествата:

- а) $P \cap Q$ б) $Q \cap R$ в) $P \cap Q \cap R$



Пример 3

Во едно училиште учениците се запишуваат на различни секции според нивните интереси. Дадени се две множества:

Ученици кои посетуваат секција по математика, се елементи на множество $A = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован}\}$.

Ученици кои посетуваат секција по информатика, се елементи на множество $B = \{\text{Јован, Ана, Лука, Елена}\}$.

- а) Кои ученици се запишани на барем една од секциите (во A или B)?
б) Запиши ги елементите на унијата на множествата A и B користејќи го знакот за унија на множества $A \cup B$.
в) Опиши што претставува унијата на множествата A и B во контекст на секциите.

Решение:

- а) Учениците од множествата A и B кои посетуваат барем една од секциите формираат ново множество кое може да го означиме, на пример, со D, односно $D = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован, Лука, Елена}\}$. Множеството D го викаме унија на множествата A и B.

Унија на две множества е множеството составено од сите елементи на двете множества. Со други зборови, ако се дадени две множества A и B, тогаш нивната унија, означена со $A \cup B$, е множеството $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

- б) Унијата на множествата A и B е множеството D: $A \cup B = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован, Лука, Елена}\}$ или $D = A \cup B = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован, Лука, Елена}\}$.
в) Унијата $A \cup B$, всушност, е множеството D составено од сите ученици кои посетуваат барем една од секциите. Тоа значи дека ако ученикот е дел од секцијата по математика, информатика или двете, тој ќе биде елемент од ова множество.

Задача 3

Дадени се множествата $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $B = \{13, 14, 15, 16\}$ и $C = \{14, 15, 16, 17, 18\}$.

- а) Претстави ги множествата со Венов дијаграм.
б) Определи ги и запиши ги множествата: $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cup (B \cap C)$.

Задача 4

Во еден супермаркет постојат два вида попусти:

Производи со попуст доколку купиш два исти производа,

множество $P = \{\text{леб, млеко, јогурт, сирење}\}$.

Производи со попуст доколку користиш картичка за попуст,

множество $D = \{\text{млеко, сирење, кафе, ориз}\}$.

- Кои производи имаат попуст ако купиш два исти и ако користиш картичка?
- Кои производи имаат попуст ако важи барем еден од двата услови?
- Каква е разликата меѓу употребата на „и“ и „или“ во овие прашања?
- Запиши ги одговорите користејќи ги математичките операции пресек $\cap$ и унија $\cup$.
- Кој израз би го користел ако сакаш да купиш производи што ги имаат и двата попушта истовремено?
- Кој израз би го користел ако сакаш да купиш производи што имаат барем еден од попустите?

Пример 4

Во една библиотека постојат две групи на книги:

Книги кои се достапни за изнајмување, множество $A = \{\text{„Хари Потер“, „Горскиот цар“, „Малиот принц“, „Алиса во земјата на чудата“, „Робинзон Крузо“}\}$.

Книги кои моментално се изнајмени, множество $B = \{\text{„Малиот принц“, „Алиса во земјата на чудата“, „Робинзон Крузо“}\}$.

- Кои книги се достапни за изнајмување, но во моментот не се изнајмени?
- Како може ова да се запише математички како разлика на множества?
- Како може ова да се претстави со Венов дијаграм?
- Како би ја опишал оваа разлика со зборови?

Решение:

- Книги кои се достапни, но не се изнајмени: тоа се книгите кои се во множеството A , но не се во множеството B , односно множеството $\{\text{„Хари Потер“, „Горскиот цар“}\}$. Ова множество се вика разлика на множествата A и B .

Множеството од сите елементи што му припаѓаат на множеството A , а не му припаѓаат на множеството B се вика разлика на множеството A со множеството B . Со други зборови, ако се дадени две множества A и B , тогаш нивната разлика, означена со $A \setminus B$, е множеството $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

б) Математичко запишување:

$$A \setminus B = \{ \text{„Хари Потер“}, \text{„Горскиот цар“} \}.$$

в) На дадениот цртеж разликата на множествата $A \setminus B$ е претставена со обоениот дел од дијаграмот.

г) Разликата $A \setminus B$ претставува книги кои библиотеката ги има на располагање, но во моментот не се изнајмени.



Задача 5

Дадени се множествата $M = \{x \mid x \text{ е двоцифрен природен број}\}$ и $N = \{7, 9, 12, 14, 16, 18, 100\}$.

а) Претстави ги множествата со Венов дијаграм.

б) Определи ги и запиши ги множествата: $M \setminus N$, $N \setminus M$, $N \cup (M \setminus N)$.

Пример 5

Ана, Боби и Калина планираат активности за викендот. Секој од нив има различни идеи за тоа што сака да прави. Активностите што сака Ана да ги прави се дадени со множество $A = \{\text{планинарење, кино, велосипедизам, трчање}\}$. Активностите што сака да ги прави Боби се дадени со множество $B = \{\text{видеоигри, кино, кошарка, велосипедизам}\}$. Активностите што сака да ги прави Калина се дадени со множество $C = \{\text{планинарење, пливање, кино, јога}\}$. Помогни им да одлучат што можат да прават заедно и кои активности ќе мора да ги прави секој поединечно!



- Кои активности можат да ги прават сите тројца заедно?
- Кои активности можат да ги прават барем двајца од нив?
- Кои активности може да се изберат ако важи барем еден од предлозите?
- Кои активности ги сака Ана, но Боби не?
- Како можеме да го претставиме ова со Венов дијаграм?

Решение:

а) Активности што можат да ги прават сите тројца: $A \cap B \cap C = \{\text{кино}\}$.

б)* Активности што можат да ги прават барем двајца:

- За Ана и Боби, заеднички активности се кино и велосипедизам, односно $F = A \cap B = \{\text{кино, велосипедизам}\}$.
- За Ана и Калина, заеднички активности се планинарење и кино, односно $D = A \cap C = \{\text{планинарење, кино}\}$, и
- За Боби и Калина, заедничка активност е кино, односно $E = B \cap C = \{\text{кино}\}$.

Ако најдеш унија на множествата F , D и E , ќе го добиеш множеството во кое барем двајца сакаат иста активност, односно $F \cup D \cup E = \{\text{кино, велосипедизам, планинарење}\}$.

- в) Активности што барем еден од нив сака да ги прави: $A \cup B \cup C = \{\text{планинарење, кино, велосипедизам, трчање, видеоигри, кошарка, пливање, јога}\}$.
- г) Активности што ги сака Ана, но не ги сака Боби: $A \setminus B = \{\text{планинарење, трчање}\}$.
- д) Веновиот дијаграм е прикажан на цртежот.



Задача 6

Еден турист планира патување и има три можни опции за превоз:

1. Превозни средства што се брзи, множество $A = \{\text{авион, воз}\}$.
2. Превозни средства што се евтини, множество $B = \{\text{автобус, воз}\}$.
3. Превозни средства што се удобни, множество $C = \{\text{авион, воз, брод}\}$.
 - а) Кои превозни средства се брзи и евтини?
 - б) Кои превозни средства се брзи или удобни?
 - в) Кои превозни средства припаѓаат на сите три множества?
 - г) Како можеш да го прикажеш изборот со Венов дијаграм?

Дали можеш да наведеш пример од твоето секојдневие каде што користиш операции со множества ($\cap$, $\cup$, $\setminus$) при донесување одлуки? Објасни како ги применуваш.

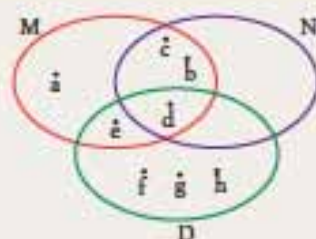
Направи мисловна мапа за сè што знаеш за множества и операции со множества. Пример за мисловна мапа во врска со поимот триаголник е даден на цртежот.



Самостојна работа

1. На цртежот се дадени множествата M , N и D .

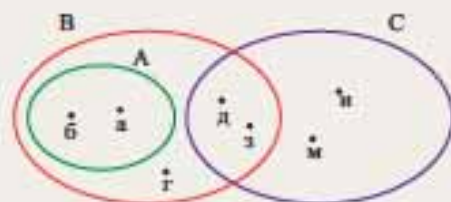
- а) Запиши ги множествата M , N и D на табеларен начин.
 б) Одреди: $M \cap N$, $N \cap D$, $M \cap D$.
 в) Одреди: $M \cup N$, $N \cup D$, $M \cup D$.
 г) Одреди: $M \setminus N$, $N \setminus D$, $M \setminus D$.



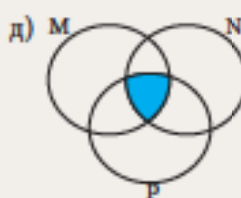
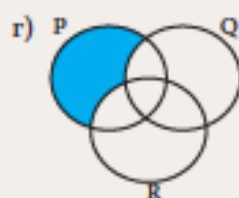
2. Ако $M = \{10, 12, 14, 16\}$, а $N = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, кое од следните множества: $\{9, 10, 11, 12, 14, 16\}$, $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$, $\{10, 12\}$, $\{14, 16\}$, $\{14, 16, 9, 13\}$, $\{9, 11, 13\}$, претставува пресек, унија и разлика на множествата M и N .

3. На цртежот со Венов дијаграм се дадени множествата A , B и C . Запиши ги на табеларен начин множествата:

- а) A , B и C б) $B \cap C$, $A \cap B$, $B \cap \emptyset$
 в) $B \cup C$, $A \cup C$ г) $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus C$



4. Претстави ги со Венов дијаграм множествата: $A = \{1, 4, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$.
5. Дадени се множествата: $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $N = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 6 \leq x \leq 11\}$ и $P = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 3 < x \leq 11\}$. Одреди:
- а) $M \cap N$, $N \cap P$, $P \cap M$ б) $M \cup N$, $N \cup P$, $P \cup M$
6. Што претставуваат елементите на множествата $A \cap B$, ако A е множеството од сите девојчиња во твоето одделение, а B е множеството од сите седмоодделенци во училиштето?
7. Множествата $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 7\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \text{ е број од првата десетка}\}$ претстави ги на табеларен начин и со Венов дијаграм. Потоа одреди ја разликата $A \setminus B$, $B \setminus A$.
8. На цртежот се дадени множествата претставени со Венов дијаграм. Кои операции се претставени со обоените делови?

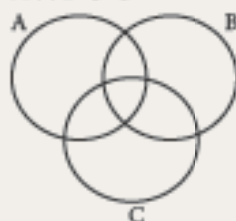


9. Прецртај го секој дијаграм во тетратка, а потоа обој го делот кој одговара на следните претставени операции:

а) $A \cap B$



б) $A \cap B \cup C$



в) $(A \cup B) \setminus (B \cup A)$



г) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Својства на операциите пресек и унија на множества

При работењето со множества, важно е да се разберат и користат одредени својства на операциите унија и пресек. Во оваа лекција ќе научиш кои се основните својства на овие операции, како што се комутативното и асоцијативното својство. Овие својства ќе ти овозможат да препознаваш и поедноставуваш изрази со множества. Со примери и задачи ќе увидиш како овие својства ќе ти помагаат во логичкото размислување и решавањето проблеми поврзани со множества.



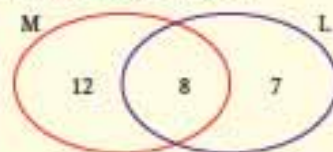
Пример 1

Во едно училиште 20 ученици посетуваат часови по математика (множество M), а 15 ученици посетуваат часови по информатика (множество L). Од нив, 8 ученици посетуваат и математика и информатика. Колку ученици посетуваат настава само по еден предмет?

Решение:

За да определиме колку ученици посетуваат настава по само еден предмет (бројот на елементи во множеството $(M \setminus L) \cup (L \setminus M)$) треба да најдеме колку елементи ќе содржи унијата на множествата на ученици што посетувале часови само по математика и множеството на ученици што посетувале часови само по информатика. Кога од вкупниот број ученици што посетуваат часови по математика го одземеме бројот на оние ученици што ги посетуваат и двата предмета ќе дознаеме колку од нив посетуваат само часови по предметот математика, т.е. $20 - 8 = 12$. Тоа значи дека 12 ученици посетуваат само часови по математика. Кога од бројот на оние што посетуваат часови по информатика го одземеме бројот на оние што ги посетувале и двата предмета ќе добиеме колку ученици посетуваат само часови по информатика, т.е. $15 - 8 = 7$. Бројот на елементите на унијата ќе биде збир на бројот на елементите во двете множества, (множествата се дисјунктни) односно $20 - 8 + 15 - 8 = 19$ ($12 + 7 = 19$).

Значи, вкупно 19 ученици посетуваат само еден од двата предмета.



За пресекот и унијата на две множества важи комутативното својство, односно ако A и B се две дадени множества, тогаш $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.

Пример 2

Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Определи ги множествата:

- а) $A \cap B$ и $B \cap A$ б) $A \cup B$ и $B \cup A$

Решение:

За подобра прегледност, користиме Венов дијаграм

- а) $A \cap B = \{2, 3\}$, $B \cap A = \{2, 3\}$. Бидејќи $\{2, 3\} = \{2, 3\}$, следува дека $A \cap B = B \cap A$.

- б) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Бидејќи $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, следува дека $A \cup B = B \cup A$.



За пресекот и унијата на множествата важи асоцијативното својство, односно ако A, B и C се три дадени множества, тогаш $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Пример 3

Дадени се множествата: $M = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $N = \{13, 14, 15, 16\}$ и $P = \{13, 15, 17, 19\}$.

Одреди ги и запиши ги множествата:

- а) $(M \cap N) \cap P$ и $M \cap (N \cap P)$ б) $(M \cup N) \cup P$ и $M \cup (N \cup P)$

Решение:

За поголема прегледност, множествата M , N и P се прикажани со Венов дијаграм.



$$\begin{aligned} \text{а) } (M \cap N) \cap P &= \{13, 14, 15\} \cap \{13, 15, 17, 19\} = \{13, 15\} \\ \text{и } M \cap (N \cap P) &= \{11, 12, 13, 14, 15\} \cap \{13, 15\} = \{13, 15\}. \\ \text{Добивме } (M \cap N) \cap P &= M \cap (N \cap P). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (M \cup N) \cup P &= \{11, 12, 13, 14, 15, 16\} \cup \{13, 15, 17, 19\} = \\ &= \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\} \text{ и} \\ M \cup (N \cup P) &= \{11, 12, 13, 14, 15\} \cup \{13, 14, 15, 16, 17, 19\} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\} \\ \text{Добивме } (M \cup N) \cup P &= M \cup (N \cup P). \end{aligned}$$

Задача 1

Дадени се множествата $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{b, c, d, e, f\}$. Провери дали $A \setminus B = B \setminus A$.

Задача 2

Провери со примери дали $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

Пример 4

Еден ресторан нуди три вида менија за појадок, и тоа:

мени А: $A = \{\text{омлет, тост, кафе}\}$; мени Б: $B = \{\text{палачинки, кафе, сок}\}$ и

мени В: $C = \{\text{сендвич, кафе, јогурт}\}$

- Покажи дека унијата на менијата е комутативна, на пример, дека $A \cup B = B \cup A$.
- Покажи дека унијата е асоцијативна, односно дека $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Решение:

- Комутативно својство на унија

Наоѓаме $A \cup B$, односно сите оброци што се појавуваат барем во едно од двете менија:
 $A \cup B = \{\text{омлет, тост, кафе, палачинки, сок}\}$, $B \cup A = \{\text{палачинки, сок, кафе, омлет, тост}\}$.
 Бидејќи множествата содржат исти елементи (редоследот не е важен), заклучуваме дека: $A \cup B = B \cup A$.

- Асоцијативно својство на унија

Прво наоѓаме $(A \cup B) \cup C$: $A \cup B = \{\text{омлет, тост, кафе, палачинки, сок}\}$.
 Сега определуваме унија на добиеното множество со множеството C , односно:
 $(A \cup B) \cup C = \{\text{омлет, тост, кафе, палачинки, сок, сендвич, јогурт}\}$.
 Потоа определуваме $B \cup C = \{\text{палачинки, сок, кафе, сендвич, јогурт}\}$, па унија на множеството A со добиеното множество $B \cup C$, односно $A \cup (B \cup C)$:
 $A \cup (B \cup C) = \{\text{омлет, тост, кафе, палачинки, сок, сендвич, јогурт}\}$.
 Бидејќи двете добиени множества се исти, заклучуваме дека: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
 Ова значи дека без разлика како ги групираме менијата, конечниот список на оброци што ги нуди ресторанот не се менува.

Примерот 4 ни покажува како својствата на унијата можат да се применат во секојдневни ситуации, како што се избори на менија, листи на производи во продавници или организирање на различни групи предмети.

Задача 3

Во една компанија има три оддели што користат различни софтвери за работа, и тоа: оддел за финансии (F): Excel, SAP и QuickBooks;

оддел за човечки ресурси (H): SAP, BambooHR и Trello;

оддел за маркетинг (M): Trello, Google Ads и Canva.

- Провери ги комутативното и асоцијативното својство на пресекот на одделите (на пример, $F \cap H = H \cap F$).
- Провери го асоцијативното својство на унијата на одделите, односно $(F \cup H) \cup M = F \cup (H \cup M)$.
- Анализирај практично што значат овие својства во однос на компанијата и нејзината организација.

Компанија сака да ги намали трошоците за софтвер и одлучува да ги задржи само оние програми што се користат во најмалку два од трите оддели (финансии, човечки ресурси, маркетинг). Како би ги искористил својствата на пресек и унија за да го одредиш списокот на софтвери што треба да останат во употреба? Дали редоследот на групирање на одделите ќе влијае врз конечниот избор на софтвери? Објасни зошто.

Објасни во твојата тетратка:

- Зошто пресекот и унијата се комутативни?
- Зошто унијата е асоцијативна?
- Како можат да помогнат овие својства во реални ситуации?



Ако ги одговориш и објасниш сите три прашања – ти си мајстор за множества!

Ако имаш сомнежи – врати се на деловите што ти се нејасни и обиди се повторно!

Самостојна работа

1. Дадени се множествата
- A, B, C
- :

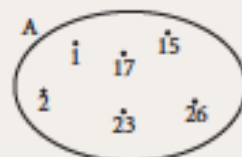
$$B = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 3 \leq x \leq 12\} \text{ и } D = \emptyset.$$

Најди ги еднаквите множества под а, б, в, г, д, е, ж, з.

а) $A \cap B$ б) $A \cap C$ в) $B \cap C$ г) $C \cap A$ д) $C \cap B$

е) $B \cap A$ ж) $A \cap D$ з) $D \cap D$



2. Дадени се множествата
- A, B, C
- и
- D
- .

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 7\}, C = \{0, 2, 4, 6, 8\} \text{ и } D = \{1, 2, 5, 8\}$$

Покажи дека се точни равенствата:

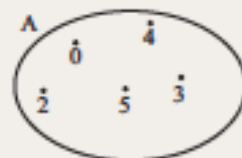
а) $A \cap B = B \cap A$ б) $A \cap C = C \cap A$ в) $B \cap C = C \cap B$

г) $D \cap B = B \cap D$ д) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

е) $(B \cap D) \cap A = B \cap (D \cap A)$ ж) $(C \cap B) \cap D = C \cap (B \cap D)$

з) $A \cap A = A$ д) $B \cap B = B$ е) $C \cap \emptyset = \emptyset$

Кои својства на операцијата пресек се изразени со равенствата а, б, в, г, д, е, ж, з?

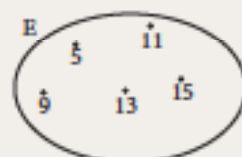


3. Дадени се множествата:
- $A = \{x \mid x \text{ е парен број}\}$
- .

 $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, C = \{4, 5, 6, 7, 8\}, D = \{x \mid x \text{ е парен број помал од } 10\}$ и E . Да се определи:

а) $A \cup B$ б) $A \cup D$ в) $C \cup D$ г) $C \cup E$ д) $D \cup E$

е) $D \cup C$ ж) $B \cup A$ з) $E \cup D$ д) $C \cup C$ е) $\{1, 2, 4\} \cup C$



4. Дадени се множествата:

 $A = \{0, 3, 5, 7, 12, 14\}, B = \{x \mid x + 5 = 7 \text{ или } x - 5 = 7\}, C$ е множество од природни броеви помали од 5 и множеството D дадено со Венев дијаграм. Покажи дека се точни равенствата:

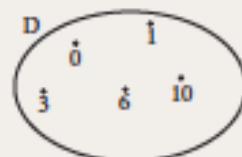
а) $A \cup B = B \cup A$ б) $B \cup C = C \cup B$ в) $B \cup D = D \cup B$

г) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ д) $B \cup (C \cup D) = (B \cup C) \cup D$

е) $(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D)$ ж) $A \cup A = A$

з) $B \cup B = B$ д) $C \cup \emptyset = C$ е) $A \cup (B \cup A) = A \cup B$

Кои својства на операцијата унија се изразени со равенствата а, б, в, г, д, е, ж, з?



5. Дали се точни равенствата? Објасни го твојот одговор.

а) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ б) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

в) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- 6.* Дадени се множествата:
- $A = \{4\}, B = \{\{4\}\}$
- . Определи: а)
- $A \cap B$
- б)
- $M = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

- 7.* Најди ја унијата на множествата:
- $A = \{x \mid x \in X, X \subset \{1\}\}$
- и
- $B = \{x \mid x \in \{1, 2\}\}$

Множество од подредени парови

Во ова лекција ќе се фокусираш на важни концепти поврзани со подредени парови и двоелементни множества.

Во текот на лекцијата ќе научиш како да ги разликуваш подредените парови од двоелементните множества и како да одредуваш множество од подредени парови на дадено множество. Со интерактивни примери и задачи ќе се увериш дека концептите стануваат јасни и применливи.



Пример 1

Дадено е множеството $M = \{1, 2, 3\}$. Запиши ги сите двоелементни подмножества на множеството M .

Решение:

Двоелементни подмножества на множеството M се: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ и $C = \{2, 3\}$.

Дали множествата $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ се еднакви? Објасни зошто.

Задача 1

Маја има влезница за концерт на која пишува ред 5, седиште 12, а на влезницата кај Илир пишува ред 12, седиште 5. Дали Маја и Илир имаат исто место на седење? Дали за нивните влезници може да запишеме $\{5, 12\}$ и $\{12, 5\}$? Објасни го твојот одговор.

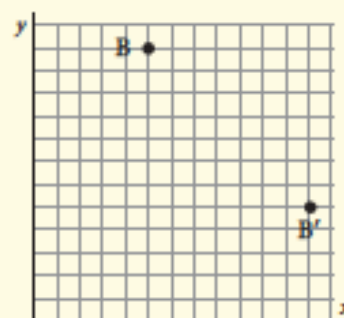
Пример 2

Размисли за разликата на записот на множеството $A = \{5, 12\}$ и записот на координатите на точката $B(5, 12)$. Објасни зошто записите не се исти и наведи примери за тоа.

Решение:

Записот $A = \{5, 12\}$ е множество кое содржи два елемента: 5 и 12. Во множеството редоследот не е важен, што значи дека $\{5, 12\}$ е исто како и $\{12, 5\}$.

Од друга страна, на пример со точката $B(5, 12)$ се означува позиција (место) во координатната рамнина каде што x -координатата е 5, а y -координатата е 12. Точката $B'(12, 5)$ означува позиција во координатната рамнина каде што x -координатата е 12, а y -координатата е 5. Значи, точките B и B' се различни. Јасно е дека $\{5, 12\}$ и $(5, 12)$ не се исти. За разлика од множеството, записот $(5, 12) \neq (12, 5)$ бидејќи зависи од редоследот. За него го користиме поимот подреден пар. Што е подреден пар?



Подреден пар од елементи е пар од два елементи за кои точно се знае кој е прв, а кој втор елемент.

Подредениот пар од два елементи a и b , за кој a е прв, а b е втор елемент се означува со (a, b) . Во таков запис a е прв елемент или прва компонента, а b е втор елемент или втора компонента.

Задача 2

Дали подредените парови $(1, 2)$ и $(2, 1)$ се еднакви? Објасни го твојот одговор. Кога два подредени пара би биле еднакви?

Два подредени пара (a, b) и (c, d) се еднакви ако и само ако $a = c$ и $b = d$.

Во подредениот пар (a, b) дозволено е $a = b$, односно и (a, a) е подреден пар.

Подредениот пар (a, b) за $a \neq b$ не е исто што и множеството $\{a, b\}$, а подредениот пар (a, a) не е исто што и множеството $\{a\}$.

Задача 3

Запиши примери на подредени парови во секојдневниот живот.

Пример 3

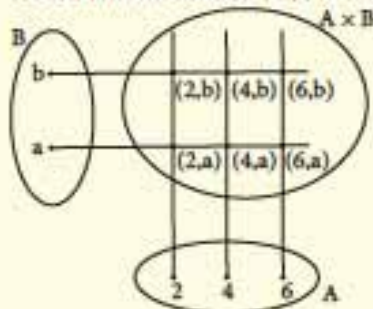
Дадени се две множества: $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{a, b\}$. Запиши го множеството чии елементи се сите подредени парови, такви што првиот елемент на секој подреден пар е од множеството A , а вториот елемент е од множеството B .

Решение:

Секој елемент од множеството A го запишуваме со секој елемент од множеството B . Кога првиот елемент е 2, ги добиваме подредените парови: $(2, a)$ и $(2, b)$, кога првиот елемент е 4, тогаш подредените парови се: $(4, a)$ и $(4, b)$, а кога првиот елемент е 6, ги добиваме следните подредени парови $(6, a)$, $(6, b)$. Множеството на подредени парови е: $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$. Ова множество се означува со $A \times B$ и се вика Декартов производ на A и B . За записот $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$ велиме дека е табеларен запис за Декартовиот производ на множествата A и B .

За две множества A и B , множеството од сите подредени парови на кои првата компонента е од множеството A , а втората од множеството B , се вика Декартов производ на A со B , а се означува со $A \times B$. Множеството $A \times B$ описно се запишува со $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$.

Често множеството $A \times B$ се претставува со Декартова шема претставена на цртежот.



Пример 4

Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3\}$. Одреди ги сите подредени парови што можат да се состават од елементите на ова множество.

Решение:

За да составиме подредени парови од множеството A , ќе ги комбинираме елементите во парови, при што редоследот на елементите е важен.

Подредените парови од елементите 1, 2, 3 се: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).

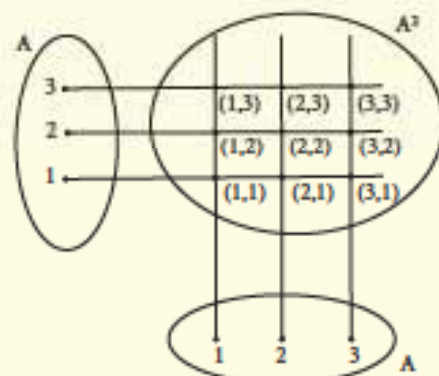
Значи, множеството на подредени парови P може да се запише како:

$$P = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Декартовиот производ $A \times A$ често се вика Декартов квадрат и се означува со A^2 , односно

$$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in A\}.$$

Декартовиот квадрат може да се претстави со Декартова шема како на цртежот.



Задача 4

Дадени се множествата $K = \{21, 22, 23\}$ и $L = \{m, n, p, q\}$. Определи го Декартовиот производ $K \times L$: а) табеларно б) со Декартова шема.

Задача 5

Најди го $A \times \emptyset$ за произволно множество A . Објасни го твојот одговор.

Задача 6

Табеларно е зададен Декартовиот производ на множествата A и B ,

$A \times B = \{(7, 2), (7, 4), (7, 6), (9, 2), (9, 4), (9, 6)\}$. Одреди ги табеларно множествата A и B .

Пример 5

Во рамките на проект за одржлив развој ученичките од седмо одделение одлучиле да создадат план за организирање локална изложба на еколошки производи. За таа цел, тие сакаат да истражат различни категории на производи и нивните својства, на пример: множество на производи: $A = \{\text{храна, облека, играчки}\}$, множество на материјали: $B = \{\text{пластика, дрво, текстил}\}$. Учениците треба да одредат $A \times B$ и да го прикажат со Декартова шема, со цел дополнително објаснување на значењето на подредените парови во контекст на еколошката свест.

Решение:

За формирање на подредените парови, учениците треба да го комбинираат секој тип на производ со секој материјал.

На пример, од подредените парови со храна како прв елемент:

(храна, пластика) - пластични амбалажи за пакување на храната;

(храна, дрво) - дрвени кутии за храна;

(храна, текстил) - текстилни вреќички за храна;

Облека како прв елемент за подредените парови:

(облека, пластика) – изработка на пластични ткаенини;

(облека, дрво) – дрвени модни украси за облеката;

(облека, текстил) - облека од рециклиран текстил.

За играчки:

(играчки, пластика) - пластични играчки;

(играчки, дрво) - дрвени играчки;

(играчки, текстил) - текстилни играчки.

Записот на Декартовиот производ $A \times B$ е:

$A \times B = \{(\text{храна, пластика}), (\text{храна, дрво}), (\text{храна, текстил}), (\text{облека, пластика}), (\text{облека, дрво}), (\text{облека, текстил}), (\text{играчки, пластика}), (\text{играчки, дрво}), (\text{играчки, текстил})\}$.

Може да се размисли за важноста на секој пар, на пример: пар (храна, пластика) може да се разгледа како проблем бидејќи пластичната амбалажа е штетна за животната средина. Што можеш да кажеш за парот (облека, текстил) или парот (играчки, дрво)?

Задача 7

Во лабораторија Мехмед разгледува различни комбинации на температури и времиња на загревање вода. Тој разгледува две множества:

Множество А: Температури во Целзиусови степени $\{10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}\}$ и

Множество В: Времиња на загревање во минути $\{5 \text{ min}, 10 \text{ min}, 15 \text{ min}\}$.

- Запиши го Декартовиот производ на множеството А со множеството В.
- Кои парови од температура и време даваат најдобар резултат за загревање на водата? (повисоките температури и подолгото време на загревање се поволни за подобро загревање на водата)

Како можеш да ги примениш концептите на подредени парови и Декартов производ во реалниот живот, особено во ситуации каде што треба да комбинираш различни опции, како што се избор на облека, планирање оброци или организирање настани? Објасни ги преку примери можните предности од користењето на овие математички концепти во секојдневните одлуки.

Во твојата тетратка нацртај круг. Во кругот запиши „Моето знаење за подредени парови и Декартов производ“.

Оцени ја својата работа со бои:

- Зелена боја: чувствувам дека одлично разбрав и можам самостојно да го применувам наученото.
- Жолта боја: имам основно знаење, но ми треба малку повеќе вежбање.
- Црвена боја: не сум сигурен во моето знаење и треба да работам дополнително.

Листа на прашања: Под кругот запиши 2-3 прашања на кои сакаш да најдеш одговор или теми кои сакаш да ги истражуваш подетално.

Самостојна работа

- Дадени се множествата: $A = \{a, b\}$ и $B = \{a, 6, 7\}$. Претстави ги на табеларен начин следните Декартови производи:
 - $A \times B$
 - $B \times A$
 - $A \times A$
 - $B \times B$
 - $(A \cap B) \times B$
 - $(B \setminus A) \times A$
 - $A \times (A \cup B)$
 - $A \times \emptyset$
- Од кои множества се добиени следните Декартови производи:
 - $\{(2, 1), (2, 3), (5, 1), (5, 3)\}$
 - $\{(5, x), (x, 5), (5, 5), (x, x)\}$
- Дадени се множествата: $A = \{0, 2, 4\}$ и $B = \{3, 5\}$. Претстави ги на табеларен, описен начин и со Декартова шема множествата: а) $B \times A$ б) $A \times A$
- * Дадени се множествата: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ и } 0 < x < 4\}$ и $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ и } 5 \leq y \leq 6\}$. Претстави ги табеларно множествата:
 - $P = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } x = y\}$, $M = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } x + y = 6\}$,
 $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } y - x = 2\}$
 - Определи ги множествата: $M \cap S$, $M \setminus S$, $M \cup S$ и $M \setminus (P \cup S)$.
- Дадени се множествата: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{x \mid x \in A \text{ и } x + 2 = 4\}$.
 - Претстави ги табеларно и со Декартова шема множествата: $A \times B$, $B \times A$ и B^2 .
 - Дали $A \times B = B \times A$? Образложи го твојот одговор.
- а) Запиши ги сите подмножества на множеството $\{(a, 5), (7, x), (4, 0)\}$.
б) Најди ги сите двоелементни подмножества на множеството $\{(1, x), (2, z), (y, x)\}$.

Цели броеви.

Споредување и подредување

Во секојдневниот живот често користиш броеви за да измериш или да опишеш различни количини. Со природните броеви најчесто се бројат предмети, а дробките и децималните броеви ти помагаат да изразиш делови од целина (на пример, половина леб или четвртина килограм шеќер). Сепак, постојат ситуации кога овие броеви не се доволни за да ги опишеш појавите околу тебе. На пример, кога температурата паѓа под нулата во зима, кога некој должи пари или кога се пресметуваат промени во височина над и под морското ниво. Во вакви случаи потребни се броеви што можат да претстават и загуба, недостиг или „движење“ во спротивна насока. Така се воведуваат целите броеви. Со нив можеш попрецизно да опишеш и да разбереш различни концепти во математиката и во реалниот живот.



Пример 1

- Запиши го табеларно множеството на цели броеви.
- Опреди го подмножеството од Z чии елементи се позитивни цели броеви.
- Опреди го подмножеството од Z чии елементи се негативни цели броеви.
- Каква врска има меѓу множествата N , N_0 , Z^+ , Z^- и Z ?

Решение:

- Елементи на множеството цели броеви се: природните броеви, нивните спротивни броеви и нулата, односно $Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- $Z^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$
- $Z^- = \{ \dots, -3, -2, -1 \}$
- Врските меѓу N , N_0 , Z^+ , Z^- и Z може да се прикажат и со операции меѓу множествата. На пример, $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$, $Z^+ = N$, $Z^+ \cup \{0\} = N_0$, $Z^+ \cap Z^- = \emptyset$, $Z \setminus Z^- = N_0$

Задача 1

Опреди ги множествата:

- $Z^+ \setminus N$; б) $Z^+ \cap N$; в) $Z^+ \cap Z^-$; г) $Z \setminus N$; д) $Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$ е) $\{0\} \cup Z^+$.

Задача 2

Почнувајќи со најмалиот, подреди ги броевите: 11, -15, -34, 15, -11, 0, 20, -20 и претстави ги на бројна права.

За $a, b \in \mathbb{Z}$ велиме дека a е поголем од b (или b е помал од a), (пишуваме $a > b$ или $b < a$) ако точката $A(a)$ е десно од точката $B(b)$ на бројната права.

Пример 2

Како ќе запишеме ако велиме „Температурата е најмалку -3°C “?

Решение:

Ако велиме „Температурата е најмалку -3°C “, тоа значи дека температурата може да биде -3°C или повисока. Математички, ова се запишува како: $T \geq -3$.

„Најмалку“ значи дека тоа е најниската можна вредност, но може да биде и повеќе. Знакот „ $\geq$ “ (поголемо или еднакво) го користиме затоа што температурата може да биде -3°C или која било поголема вредност (на пример, 0°C , 5°C , 10°C и сл.).

Сличен пример: Ако велиме „Температурата е најмногу 10°C “, тоа значи дека таа може да биде 10°C или помалку, па запишуваме: $T \leq 10$.

За $a, b \in \mathbb{Z}$, за кои $a = b$ или $a > b$, пишуваме $a \geq b$.

За $a, b \in \mathbb{Z}$, за кои $a = b$ или $a < b$, пишуваме $a \leq b$.

Пример 3

Искористи ги знаците $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ за да запишеш врски меѓу броевите:

а) 2 и 3 б) -4 и -3

Решение:

Точно е дека $3 > 2$, но исто така точно е дека $3 \geq 2$ и $3 \geq 3$.

Слично, точно е дека $-4 < -3$, но исто така $-4 \leq -3$ и $-4 \leq -4$.

Задача 3

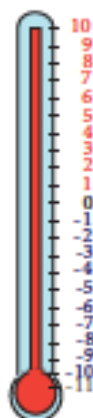
На бројна права:

- а) Со црвена боја означи три точки чии координати се помали или еднакви на -3 .
 - б) Со сина боја означи три точки чии координати не се помали од 2.
 - в) Со зелена боја означи три точки со координати поголеми или еднакви на 2.
- Што забележуваш?

Пример 5

Температурата во различни градови е:

- Во Скопје температурата е 5°C .
- Во Тирана температурата е 2°C .
- Во Подгорица температурата е -3°C .
- Во Сараево температурата е -5°C .
- Во Белград температурата е 0°C .
- Во Загреб температурата е -3°C .
- Во Атина температурата е 5°C .



- а) Кој град има највисока температура?
- б) Кој град има најниска температура?
- в) Колку е разликата во температурата помеѓу Скопје и Сараево?
- г) Колку градови имаат негативни температури?
- д) Подреди ги температурите од сите градови со користење на симболот $\leq$.
Во каков редослед ги запиша броевите (растечки или опаѓачки)?

Решение:

- а) Највисока температура има во Скопје и во Атина, 5°C .
- б) Најниска температура има Сараево со -5°C .
- в) Разликата во температурата е 10°C . Објасни зошто.
- г) Негативни температури имаат Подгорица (-3°C), Сараево (-5°C) и Загреб (-3°C).
- д) Температурите се подредени во растечки редослед: $-5 \leq -3 \leq -3 \leq 0 \leq 2 \leq 5 \leq 5$.

Задача 4

Марко и неговите пријатели се договараат да соберат пари за опрема за спорт. Секој од нив има различен износ на долг и приход:

- Марко има долг од 50 денари, приход од 100 денари.
 - Ана има долг од 30 денари, приход од 80 денари.
 - Никола има долг од 20 денари, приход од 120 денари.
 - Теа има долг од 40 денари, приход од 90 денари.
 - Фатима има долг од 10 денари, приход од 70 денари.
- а) Користејќи цели броеви, запиши ги долгот и приходот на Марко и на секој од неговите пријатели. Подреди ги во опаѓачки редослед добиените цели броеви.
 - б) Кој од нив должи најмногу?
 - в) Кој од нив има најголем приход?
 - г) Кој од нив има најголема разлика помеѓу приходот и долгот?
 - д) Запиши го како негативен цел број вкупниот долг на сите пријатели.

Како би можело да се користат целите броеви во секојдневниот живот? Дали можеш да наведеш примери од твојот денешен ден каде што се сретна со позитивни и негативни цели броеви, споредување на цели броеви?

Во твојата тетратка, одговори на следниве прашања:

1. Дали разбираам што се цели броеви и како тие се делат на позитивни, негативни и нула? Да / Не
2. Мојам ли самостојно да запишам позитивни и негативни цели броеви? Да/Не
3. Мојам ли да наведам примери од секојдневниот живот во кои се користат цели броеви? Да / Не
4. Дали мојам да ја објаснам врската помеѓу множествата N , N_0 , Z^+ , Z^- и Z ? Да/Не
5. По одговорите на прашањата напиши во твојата тетратка краток коментар за тоа што ти е најтешко или што ти оди најдобро.

Самостојна работа

1. Запиши 12°C над нулата и 15°C под нулата.
2. Определи ги множествата:
 - а) $Z^+ \setminus Z$
 - б) $Z^+ \cap Z$
 - в) $Z^+ \cap Z^-$
 - г) $Z \setminus N$
 - д) $Z \setminus (\{0\} \cup Z^+)$
 - е) $\{0\} \cup Z^+$
3. Температурата измерена во еден летен ден била 32°C , а потоа се променила за 3°C . Колку била температурата подоцна? Објасни го одговорот користејќи ја бројната права. Размисли колку решенија има задачата?
4. Броевите: $2, -5, -1, 0, 9, -100$ подреди ги по големина, почнувајќи од најмалиот број.
5. Користејќи ги симболите $\in$ и $\notin$, запиши ги елементите од множеството $\{2; -1; 3\frac{1}{2}; 0; -55; 3, 01; \frac{4}{2}\}$ кои припаѓаат, односно не припаѓаат на Z .
6. Дадено е множеството $A = \{2, -6, 8, 12, 0, -10\}$. Запиши ги табеларно множествата: $B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ позитивен цел број}\}$, $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ е негативен цел број}\}$ и $D = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ не е ниту позитивен ниту негативен цел број}\}$.
7. Кое од тврдењата е точно?
 - а) $N_0 \subset Z$
 - б) $Z^+ \cap Z^- = \{0\}$
8. Во табелата се претставени температурите измерени во неколку градови во Република Северна Македонија. Во кои градови температурата е изразена со позитивни цели броеви, а во кои со негативни?

Температура по градови

Градови	Температура
Скопје	3°C
Битола	-6°C
Охрид	5°C
Велес	0°C
Струмица	7°C
Прилеп	-4°C

9. Со помош на знаците + и – запиши:
 - а) температура од 11°C под нулата
 - б) температура од 7°C над нулата
 - в) загуба од 5000 евра.
10. Што е точно?
 - а) $3 \in \mathbb{N}_0$ б) $0 \in \mathbb{Z}^-$ в) $-22 \in \mathbb{Z}$ г) $0 \in \mathbb{N}$
11. Одреди го резултатот на дадените операции користејќи ги множествата $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\emptyset$.
 - а) $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ б) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^-$ в) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^-$
12. Температурата измерена вчера во 13 часот била -3°C , а денес е -5°C . Кога температурата е пониска?
12. Со помош на бројна оска спореди ги броевите:
 - а) 2 и 5 б) 4 и 0 в) -5 и 0 г) 2 и -6 д) -1 и -2
13. Препиши ја задачата во твојата тетратка и заокружи што е точно:
 - а) $-116 < +4$ б) $0 > 433$ в) $-34 > 0$ г) $-200 < -199$
14. Подреди ги по големина броевите: -4 , 0 , -49 , 32 , 15 , -5 и -50 , почнувајќи од најголемиот.
15. Дадено е множеството $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -4 < x < 1\}$. Запиши ги табеларно множествата: $B = \{x \mid x \in A \text{ и } x < -1\}$ и $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \geq -2\}$.
16. Температурата се променила од -10°C на -4°C . Која температура е повисока?
17. Подреди ги по големина броевите почнувајќи од најмалиот: -15 , 45 , 13 , 0 , -34 , -31 и 14 .
18. Спореди ги броевите користејќи ги знаците < или >.
 - а) 0 и -234 б) -99 и -100 в) -14 и $+13$ г) $+21$ и -30

Апсолутна вредност

Во оваа лекција ќе се запознаеме со поимот апсолутна вредност, кој ја претставува оддалеченоста на еден број од нулата на бројната права, независно од насоката. Овој концепт е од клучно значење за разбирање на разликите помеѓу позитивните и негативните броеви, и игра важна улога во решавањето различни математички проблеми.

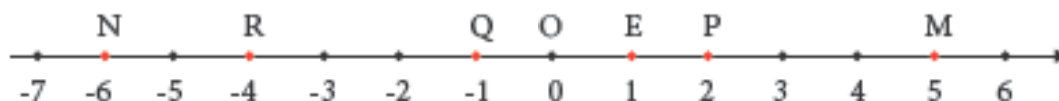


Потсети се:

1. Права r со избрани точки O и E , односно единична отсечка OE , заедно со поимите „лево“, „десно“ (O е лево од E , а E е десно од O), на која со пренесувањето на единичната отсечка лево и десно од точката O се означени бесконечно многу точки (наречени целобројни точки) на кои им се придружени целите броеви (како на цртежот во пример 1) се вика бројна права (бројна оска).
2. Со изборот на точките O и E , бројната права е насочена. Насоката од O кон E , односно насоката во десно, се нарекува позитивна насока. Спротивната насока, во лево, се нарекува негативна насока. На полуправата OE се нанесени позитивните цели броеви, додека на нејзината составна полуправа се нанесени негативните цели броеви.
3. За секоја целобројна точка N , целиот број a што е придружен на таа точка се вика координата на таа точка, а се означува $N(a)$. Бројната права се вика и координатна оска, а точката O се вика координатен почеток.

Пример 1

- а) На цртежот се дадени точките M, N, P, Q и R . Кои се нивните координати?



- б) За секоја од точките M, N, P, Q и R запиши од која страна од точката O е и на кое растојание.

Решение:

- а) Точката M има координата 5, односно $M(5)$. Потоа $N(-6)$, $P(2)$, $Q(-1)$ и $R(-4)$.
- б) Точката M е од десната страна на точката O и е на растојание од 5 единични отсечки. Точката N е лево од точката O и е на растојание од 6 единични отсечки. Продолжи да запишуваш во твојата тетратка за точките P, Q и R .

Нека $A(a)$ е точка од бројната права. Тогаш:

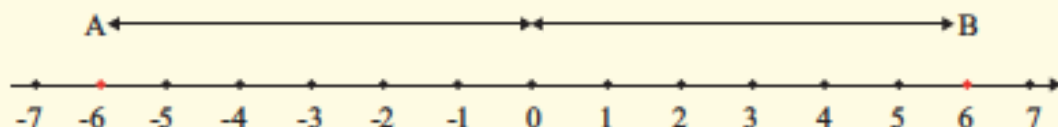
1. Ако a е позитивен цел број, односно $a = n$, тогаш точката A е десно од O и нејзиното растојание до O е еднакво на n единични отсечки;
2. Ако a е негативен цел број, односно $a = -n$, тогаш точката A е лево од O и нејзиното растојание до O е еднакво на n единични отсечки;
3. Ако $a = 0$, тогаш точката A се совпаѓа со точката O .

Пример 2

Разгледај ги точките $A(-6)$ и $B(6)$ на бројната права на цртежот. Што забележуваш?

Решение:

Тие се симетрични во однос на точката O , а нивните координати се спротивните цели броеви 6 и -6 . Исто така, тие се еднакво оддалечени од точката O , но едната е на десната, а другата на левата страна од точката O .



Растојанието на секоја целобројна точка $A(a)$ со координата a до координатниот почеток O , независно од тоа дали точката A се наоѓа десно или лево од точката O , се вика апсолутна вредност (или модул) на целиот број a и се означува со $|a|$.

На пример:

$$|-35| = 35; |135| = 135; |-453| = 453; |0| = 0; |47| = 47.$$

Задача 1

Најди ги апсолутните вредности на броевите: 11 , -15 , -34 , 15 , -11 , 20 и -20 .

За апсолутните вредности на целите броеви важат следните својства.

За секој цел број a :

1. $|-a| = |a|$;
2. $|a| = 0$ ако и само ако $a = 0$;
3. $|a| \in \mathbb{N}_0$.

Задача 2

Најди ги сите цели броеви a за кои: а) $|-a| = 3$; $|a| = 8$; $|a| = 0$.

Задача 3

Нека $a, b \in \mathbb{Z}$. Провери ја точноста на тврдењата и објасни го твојот одговор:

- Ако $|a| > |b|$, тогаш $a > b$.
- Ако $a > b$, тогаш $|a| > |b|$.
- Ако $a < b$, тогаш $|a| < |b|$.

Задача 4

Дадени се тврдењата:

- Секој негативен цел број е помал од нулата, а нулата е помала од секој позитивен цел број.
- Секој негативен цел број е помал од секој позитивен цел број.
- Не постои најмал цел број и не постои најголем цел број.
- Најмал позитивен број е -1 , а најголем негативен цел број е 1 .
- Меѓу кои било два цели броја или нема цел број или има конечен број на цели броеви.
- За секои два различни цели броја, еден од нив е поголем или помал од другиот.
- Од два позитивни броја поголем е оној што има поголема апсолутна вредност, а од два негативни броја помал е оној што има поголема апсолутна вредност.
- Апсолутната вредност на секој цел број е број поголем или еднаков на нула.
- Еден број е позитивен ако е помал од нула, а негативен ако е поголем од нула.
 - Кои тврдења се точни?
 - Неточните тврдења запиши ги да бидат точни.

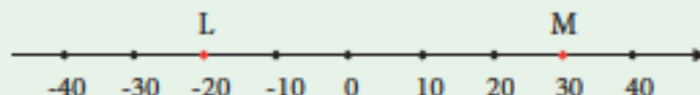
Пример 3

Марија и Лука се учесници во натпревар за собирање пари за хуманитарна организација. Марија собрала 50 евра, но имала трошоци од 20 евра за материјали. Лука, од друга страна, успеал да собере 30 евра, но имал трошоци од 50 евра.

- Кој од нив има подобар краен резултат?
- Каква е апсолутната вредност на секој од резултатите?

Решение:

- Ако Марија собрала 50 евра и потрошила 20 евра за материјали, тогаш ѝ останале 30 евра и значи има позитивен резултат, $+30$ евра. Ако Лука собрал 30 евра, а потрошил 50 евра, тогаш тој ќе има негативен резултат, -20 . На бројната права резултатите ќе изгледаат вака:



- Апсолутната вредност на крајниот резултат на Марија е $|30|=30$. Апсолутната вредност на крајниот резултат на Лука е $|-20|=20$.

Задача 5

Замислете дека живеете во град каде што зимските температури можат да бидат многу ниски. На пример: на 1 јануари температурата е -5°C , а на 2 јануари температурата е 3°C .

Кое е растојанието од нулата во температурата во овие два дена?

Како можеш да ги примениш концептите на апсолутна вредност и подредување цели броеви во реалниот живот? Дали можеш да дадеш примери од различни области, како што се спорт, економија или наука, каде што овие концепти можат да ти помогнат да донесеш одлуки или да разбереш податоци? Истражувај.

I. Користи скала од 1 до 5 за да се оцениш:

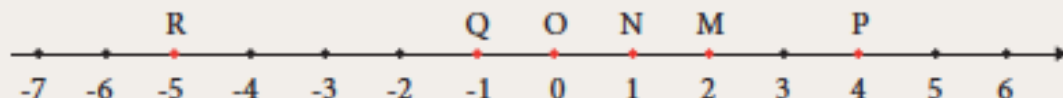
- 1: Не разбираам воопшто.
- 2: Разбирам малку, но имам многу прашања.
- 3: Разбирам основни концепти, но не се чувствувам сигурно.
- 4: Разбирам добро, но можам да научам повеќе.
- 5: Разбрав сè и се чувствувам сигурно.

II. Во твојата тетратка одговори на следниве прашања:

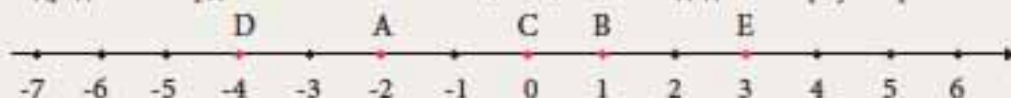
1. Кои се трите работи што ги научив со лекцијата?
2. Дали успеав да ги применим концептите на апсолутна вредност и подредување цели броеви?
3. Дали можам да дадам примери?
4. Што е за мене најтежок дел што го научив со оваа лекција и зошто?
5. Кој дел од лекцијата би сакал да го разјасниме или повториме?

Самостојна работа

1. На бројна права одреди ги точките: $A(2)$, $B(-2)$, $C(4)$, $D(-6)$ и $E(5)$.
2. Дали на секој позитивен и на секој негативен цел број му одговара точка од бројната права? Објасни го твојот одговор.
3. На цртежот се означени точките M, N, P, Q и R. Кои се нивните координати?

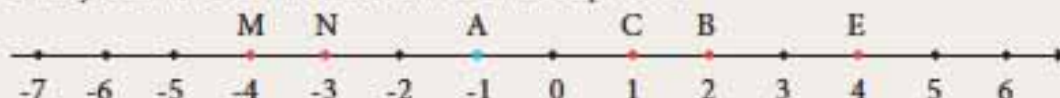


4. Одреди ги координатите на точките A, B, C, D и E на дадената бројна права.



5. Нека со $K(-5)$, $N(-3)$, $G(+3)$ и $D(0)$ се означени температурите во Кавадарци, Неготино, Гевгелија и Делчево, измерени во еден зимски ден. Нацртај бројна права, а потоа претстави ги резултатите од мерењето на температурата.

6. Во која точка ќе се помести точката A ако се пренесе:



- а) две единици налево? б) три единици надесно?

7. Со користење бројна права запиши три последователни цели броеви кои се наоѓаат:

- а) лево од -2 б) десно од -1

- 8*. Дадени се точките $M(-3)$, $N(2)$ и $P(4)$. Најди ги координатите на точките E и F кои се средини на отсечките MN и NP, соодветно, а потоа должината на отсечката EF.

9. Нека точката A се наоѓа две единици десно од -1 на бројната права. Одреди точка B која е на растојание 3 единици од точката A. Кои координати може да ги има точката B?

10. Точката M (-1) е средина на отсечката AB. Најди ја координатата на точката A ако $B(2)$. Одреди ја координатата на точката A.

11. Пополни ги табелите:

а)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$-a$							

б)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$ a $							

12. Најди ги сите цели броеви a за кои:

- а) $|-a| = 3$ б) $|a| = 8$ в) $|a| = 0$

13. Нека $x \in \mathbb{Z}$. Каков број е:

- а) $-x$, ако x е негативен број? б) x , ако $-x$ е позитивен број?
в) $|x|$, ако x е позитивен број?

- 14.* Реша ја равенката $|x| = 10$.

Собирање на цели броеви со исти или различни знаци

Во секојдневниот живот често се среќаваш со позитивни и негативни броеви. Температурите можат да бидат над или под нулата, финансиските трансакции можат да вклучуваат добивки или загуби, а височините можат да бидат надморски или подморски. Пресметките со целите броеви се постојано присутни во нашето секојдневие. За правилно пресметување на ваквите вредности, потребно е да знаеш како да ги собираш целите броеви, без разлика дали имаат исти или различни знаци. Во оваа лекција ќе научиш како да ги собираш целите броеви, кои правила треба да ги следиш и како да ги примениш во реални ситуации. Со вежбање и анализа на примери ќе стекнеш сигурност во работењето со позитивни и негативни броеви.



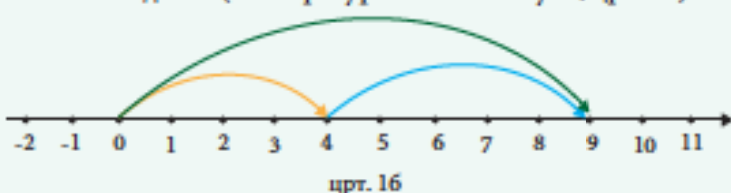
Пример 1

Температурата на воздухот во 7 часот била 4°C над нулата. Колкава е температурата во 14 часот ако таа се зголемила за 5°C ?

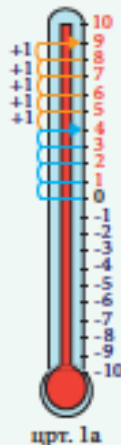
Решение:

Решението на задачата е дадено со цртежи (црт. 1а, 1б).

Прикажано на бројната права, тоа би изгледало како и на термометарот: за да го претставиме бројот $+4$ на бројната права, се движиме надесно (во позитивната насока) 4 единични отсечки, а за бројот $+5$ уште 5 единични отсечки надесно (температурата се зголемува, црт. 1б)



Од цртежот се гледа дека $(+4) + (+5) = +9 = +(4+5) = +9$.



Задача 1

Пресметај:

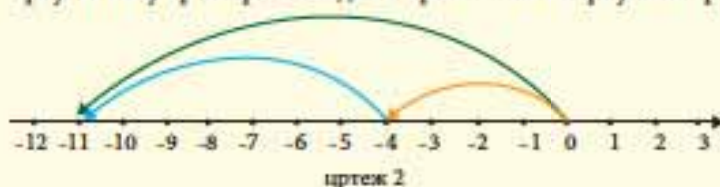
- а) $(+73) + (+29)$ б) $(+247) + (+113) + (+310)$

Пример 2

Во еден зимски ден температурата напладне била 4°C под нулата, а вечерта до 19 часот таа се спуштила за уште 7°C . Колку степени била температурата во 19 часот?

Решение:

Температурата напладне била 4°C под нулата (негативен број -4°C), потоа се спуштила за уште 7°C (повторно негативна вредност -7°C). Тоа значи дека во 19 часот ќе биде постудено, односно температурата во 19 часот ќе биде пониска од температурата напладне и таа ќе биде 11°C под нулата, односно -11°C . Можеме да речеме дека сме собрале два негативни цели броја. Притоа, како резултат на тој збир повторно добивме негативен цел број. И овој пример може да се претстави на бројната права (цртеж 2).



Од бројната права се гледа дека најпрво се движиме 4 единични отсечки налево (во негативната насока), а потоа за да го додадеме бројот -7 , уште 7 единични отсечки налево (повторно во негативната насока на бројната права, како на цртеж 2, од каде што се гледа дека $(-4) + (-7) = -(4 + 7) = -11$).

Од примерите 1 и 2 може да заклучиме:

Збирот на два цели броја со исти знаци (и двата позитивни или и двата негативни) е цел број чија апсолутна вредност е збир од апсолутните вредности на двата броја (како збир на природни броеви), со ист знак (позитивен или негативен) како знаците на собираците.

Задача 2

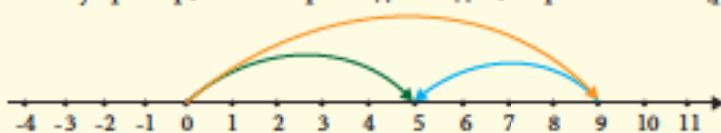
Пресметај: а) $(+5970) + (+3730)$ б) $(-6100) + (-1370) + (-2806)$

Пример 3

- а) Температурата напладне изнесувала 9°C над нулата. До 20 часот таа се спуштила за 4°C . Колку е температурата во 20 часот?
б) Температурата напладне изнесувала 9°C над нулата. До 20 часот навечер таа се спуштила за 12°C . Колку е температурата во 20 часот?

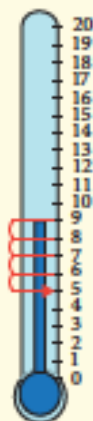
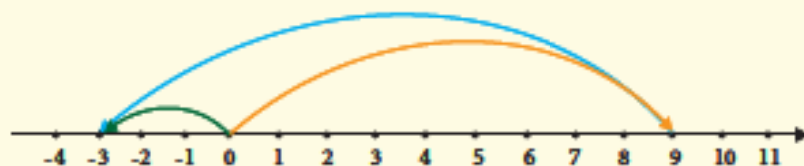
Решение:

а) И овој пример, како и претходните два, е прикажан со цртежи.



Користејќи ги цртежите со термометарот и бројната права, објасни го решението: $(+9) + (-4) = +(9 - 4) = +5 = 5$. Разликата во заградата $9 - 4 \in \mathbb{N}$, бидејќи како што се забележува и од бројната права, всушност, тоа се растојанијата од една до друга точка (број), односно апсолутни вредности. Притоа се менува само насоката на движење во зависност од знакот на бројот (позитивен или негативен број).

- б) Ќе го прикажеме решението само со помош на бројна права. Најпрво го претставуваме првиот собирок, односно се движиме 9 единични отсечки надесно за температурата $+9$, а потоа 12 единични отсечки налево. Така $(+9) + (-12) = -(12 - 9) = -3$. Разликата $12 - 9 \in \mathbb{N}$. Зошто?



Задача 3

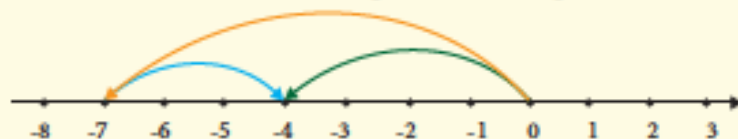
Пресметај: а) $(+85) + (-30)$ б) $(+497) + (-589)$

Пример 4

- а) Температурата во еден зимски ден наутро изнесувала 7°C под нулата. Колку е температурата напладне истиот ден ако таа се покачила за 3°C ?
- б) Температурата во еден зимски ден наутро изнесувала 7°C под нулата. Колку е температурата напладне истиот ден ако таа се покачила за 11°C ?

Решение:

- а) Решението на оваа задача е прикажано на цртежот.



Почнувајќи од нулата, на бројната оска нанесуваме налево 7 единични отсечки затоа што температурата наутро била 7°C под нулата, а потоа нанесуваме надесно 3 единични отсечки затоа што температурата се покачила за 3°C .

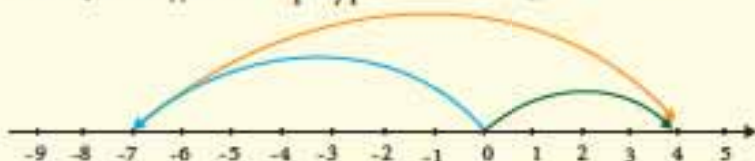
На овој начин добиваме дека температурата напладне изнесувала 4°C под нулата.

Ова може да се запише и на следниов начин:

$$(-7) + (+3) = -(7-3) = -4.$$

Разликата $7-3 \in \mathbb{N}$. Објасни зошто?

- б) И во овој случај решението е прикажано со бројна права, најпрво се движиме 7 единични отсечки налево (за температурата -7°C), а потоа 11 единици надесно (за покачувањето на температурата од 11°C). Така се добива $(-7) + (+11) = +(11 - 7) = +4$. Значи, напладне температурата била $+4^{\circ}\text{C}$.



Со решавање на примерите 3 и 4 може да се заклучи:

Збир на два цели броја со различни знаци (позитивен и негативен или негативен и позитивен) е цел број чија апсолутна вредност е еднаква на разликата (како природни броеви) од поголемата со помалата апсолутна вредност на тие два броја, а неговиот знак е еднаков на знакот на бројот со поголемата апсолутна вредност.

Збирот на кој било цел број со 0 и на 0 со кој било цел број е самиот цел број $0 + a = a + 0 = a$, $a + (-a) = (-a) + a = 0$, каде a е елемент на Z и т.н..

Збирот на кој било цел број со неговиот спротивен број е нула.

Задача 4

Пополни ја табелата:

a	26	-65	-182	200	1670	0	34
b	-12	19	243	-497	0	-195	-34
a+b							

Задача 5

Температурата во 14 часот била 6°C над нулата. Доколку до 19 часот таа се спуштила за 6°C , колку била температурата во 19 часот? Објасни го твојот одговор со користење бројна права и како збир на два цели броја. Што може да заклучиш?

Знаци на собироките	Знак на збирот	Операција меѓу апсолутните вредности на броевите	пример
$\oplus + \oplus = \oplus$	+	собирање	$(+6) + (+4) = +10$
$\ominus + \ominus = \ominus$	-	собирање	$(-4) + (-6) = -10$
$\oplus + \ominus = \oplus$	+	одземање	$(+6) + (-4) = +2$
$\ominus + \oplus = \ominus$	-	одземање	$(+4) + (-6) = -2$

Пример 5

- а) Анита има негативно салдо на својата платежна картичка од 1200 денари. Добила прилив на средства од 5700 денари. Која е состојбата на картичката по приливот на средства?
- б) Милош има негативно салдо од 1000 денари, но купува на интернет и прави дополнителен одлив на средства за уште 280 денари. Која е состојбата на картичката на Милош по купувањето на интернет?
- в) Дали Анита и Милош имаат доволно пари заедно за да го купат подарокот од 3300 денари кој го избрале за нивниот пријател Илир?

Решение:

- а) Поради негативното салдо на картичката на Анита, почетната состојба е -1200 денари. По приливот на 5700 денари $(+5700)$ состојбата на картичката е следна:
 $(-1200) + (+5700) = +4500$.
- б) Милош има негативно салдо од 1000 денари и на тоа додава уште трошок од 280 денари, значи состојбата на неговата картичка е $(-1000) + (-280) = -1280$ денари.
- в) За да го купат подарокот, потребни им се 3300 денари, но тие заедно имаат:
 $(+4500) + (-1280) = +3220$, што не е доволно за купување на тој подарок.
 Дали Анита и Милош ќе имаат доволно пари да го купат избраниот подарок ако Милош претходно не купувал на интернет?

Задача 6

Поради лоши навики за хранење и несоодветни диети, Пеце имал 6 килограми помалку од својата вообичаена телесна маса. Тој сакал да ја подобри својата општа физичка состојба и да се врати на својата вообичаена телесна маса. Со правилна и здрава исхрана успеал да ја зголеми својата телесна маса за 7 килограми. Каква е конечната состојба со телесната маса на Пеце?

Задача 7

Мерита се движи со лифт во висококатница.

- а) Таа се наоѓа во подземниот паркинг на катот означен со -2 и се движи со лифтот 6 ката нагоре. На кој кат ќе стигне Мерита со лифтот?
- б) Ако од 4 кат сака да се симне во подземниот паркинг на катот означен со -3 , колку ката треба да се движи? Како се претставува оваа ситуација со збир на цели броеви?

Како се менува збирот ако наместо да собираш само позитивни броеви, додадеш и негативни? Како тоа влијае врз конечниот збир?

Во твојата тетратка:

1. Запиши три работи што ти научи за собирање на цели броеви со исти или различни знаци.
2. Напиши еден пример од секојдневниот живот каде што можеш да го примениш наученото.
3. На скала од 1 до 5, оцени како се чувствуваши: самоуверен во твоето разбирање на лекцијата (1 - воопшто не разбираам, 5 - целосно разбираам).
4. Запиши едно прашање што ти е нејасно или за кое би сакал да дознаеш повеќе.

Самостојна работа

1. Со помош на бројна права пресметај ги збирите:

а) $(+2) + (+3)$ б) $(-4) + (-2)$ в) $(+3) + (-7)$ г) $(-5) + (+4)$
д) $(+23) + (+32)$ е) $(+17) + 0$ ж) $(-140) + (-8)$ з) $0 + (-54)$
з) $(-18) + (+23)$ с) $(+2) + (-2)$ и) $(+51) + (-68)$ ј) $(-153) + (+153)$

2. Претстави го бројот $+15$ како збир на три позитивни броеви.
3. Претстави го бројот -24 како збир на два негативни цели броеви.
4. Бројот -11 запиши го како збир на два цели броја со различни знаци.
5. Бројот $+6$ запиши го како збир на два цели броја со различни знаци.
6. Пресметај:
а) $(-45) + (-13) + (-23)$ б) $(+12) + ((+99) + (+1))$ в) $(+41) + (+23) + (+87)$
г) $(-14) + (-21) + (-10) + (-15)$ д) $(+22) + (-43) + (+1)$ е) $(+16) + (-31) + (+2)$
е) $(-43) + (+41) + (+5)$ ж) $(+7) + (-71) + (+15)$
7. Мирко ѝ должи 60 денари на Ана, а на Петар 90 денари. Колку вкупно денари е должен Мирко? Запиши го долгот на Мирко како броен израз со цели броеви.
8. Билјана имала 1000 денари на тековна сметка. Таа потрошила 1200 денари, а по извесно време уплатила на својата тековна сметка 3000 денари. Колку денари има сега Билјана?
9. Кој број ќе се добие ако збирот на броевите -45 и $+57$ се собере со збирот на броевите -2 и -16 ?
10. Една вечер температурата на воздухот била -11°C , а преку ноќта се намалила за 5°C . Колку била температурата по намалувањето?

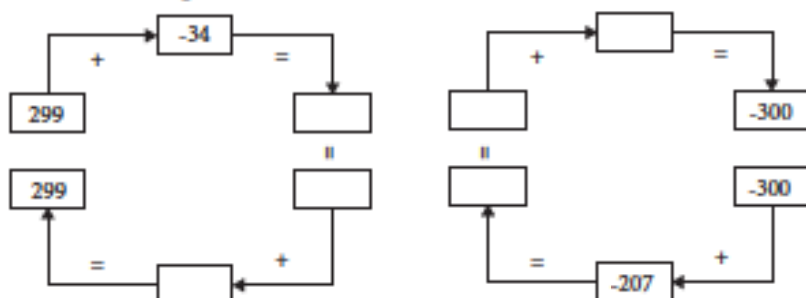
Својства на операцијата собирање на цели броеви

Собирањето е една од основните математички операции и игра клучна улога во секојдневното живеење. Од купување производи во продавница до мерење време или количество, собирањето помага да ги организираш и управуваш твоите ресурси. Во оваа лекција ќе научиш за својствата на собирањето, како што се комутативното и асоцијативното својство, и ќе истражуваш како тие влијаат врз начинот на кој ги решаваш математичките проблеми. Со практични примери и активности ќе ги примениш овие својства и ќе разбереш како да ги искористиш во различни ситуации.



Пример 1

Пополни ги празните места



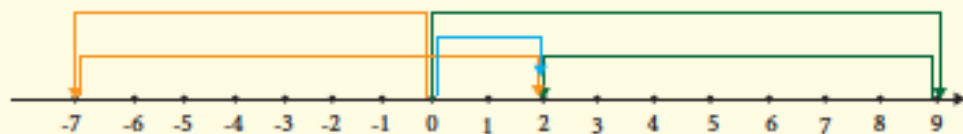
Упатство: За да ги пополниш празните полиња на дијаграмите, ако имаш потреба, потсети се како се собираат цели броеви со исти или различни знаци од претходната лекција.

Пример 2

Пресметај ги зборовите: $9 + (-7)$ и $(-7) + 9$.

Решение:

Користејќи ја бројната оска на црт. 1, на која се означени двата збира $9 + (-7)$ и $(-7) + 9$, може да заклучиш дека $9 + (-7) = 9 - 7 = 2 = (-7) + 9$.



црт. 1

Збирот на два цели броја не се менува ако собироците си ги заменат местата, односно важи комутативниот закон. Со други зборови,

За секои $a, b \in \mathbb{Z}$, важи: $a + b = b + a$.

Задача 1

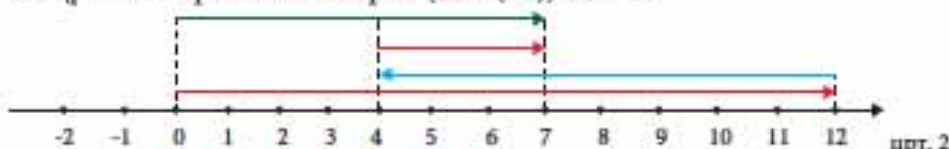
Провери ја точноста на равенството: $a + b = b + a$ за броевите:

а) $a = 81, b = -5$; б) $a = -3540, b = 3075$; в) $a = 220, b = -220$.

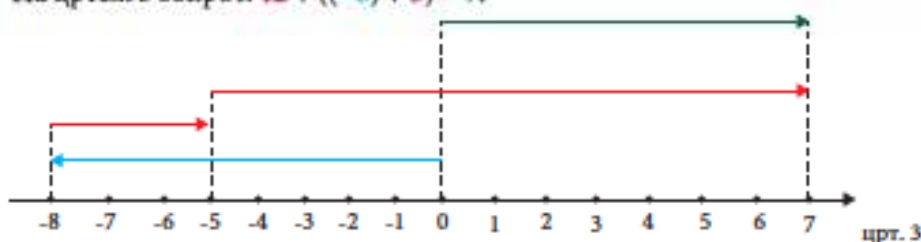
Пример 3

Пресметај ги зборовите $(12 + (-8)) + 3$ и $12 + ((-8) + 3)$.

На цртеж 2 е претставен збирот: $(12 + (-8)) + 3 = 7$.



На цртеж 3 збирот: $12 + ((-8) + 3) = 7$.



Од еднаквоста на соодветните координати следува дека двата збира се еднакви, односно: $(12 + (-8)) + 3 = 12 + ((-8) + 3)$.

За кои било три $a, b, c \in \mathbb{Z}$, зборовите $(a + b) + c$ и $a + (b + c)$ се еднакви, односно $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Кажано со други зборови, збирот на три цели броеви не зависи од нивното групирање, односно за собирањето на цели броеви важи асоцијативниот закон. Затоа, наместо $(a + b) + c$ или $a + (b + c)$ ќе пишуваме само $a + b + c$. На сличен начин ќе пишуваме само $a + b + c + d, a + b + c + d + e$ итн. Збирот на конечно многу цели броеви не зависи од нивното групирање.

Задача 2

На наједноставен начин пресметај ги зборовите:

а) $730 + (-490) + (-230) + 90$ б) $1600 + (-9600) + (-1600) + 4600$

Пример 4

На почетната станица во еден автобус од градскиот сообраќај се качиле 17 патници. На првата станица се качиле 10 патници, а слегле 3 патници, на втората станица се качиле 7 патници, а слегле 5 патници и на третата станица се качиле 4 патници, а слегле 12 патници. Колку патници имало во автобусот по третата станица?

Решение:

На почетната станица во еден автобус од градскиот сообраќај се качиле 17 патници.

На првата станица се качиле 10 патници, а слегле 3 патници. Така, новиот број на патници во автобусот е: $17 + 10 - 3 = 27 - 3 = 24$.

На втората станица се качиле 7 патници, а слегле 5 патници. Така, новиот број на патници во автобусот е: $24 + 7 - 5 = 26$.

На третата станица се качиле 4 патници, а слегле 12 патници. Така, новиот број на патници во автобусот е $26 + 4 - 12 = 18$.

Значи, по третата станица во автобусот имало 18 патници.

Пример 5

Петар, Ана и Борис добиле поени во математичка игра. Петар имал -7 бода, Ана $+12$ бода, а Борис -5 бода. Тие сакаат да пресметаат колку вкупно бода имаат заедно, но секој пресметувал на различен начин.

- Петар запишал $(-7) + (+12) + (-5)$, Ана $(+12) + (-7) + (-5)$ и Петар $(-5) + (-7) + (+12)$. Колку вкупно добил секој? Кое својство е користено?
- Користи го асоцијативното својство за да го пресметаш збирот.

Решение:

а) Може да воочиш дека секој прво го запишувал бројот на своите бодови и секој добил: Петар $(-7) + (+12) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$; Ана $(+12) + (-7) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$ и Борис $(-5) + (-7) + (+12) = (-12) + (+12) = 0$. Со тоа што секој ги запишувал собирците на различно место се користело комутативното својство на операцијата собирање на цели броеви. Вкупниот број на освоени бодови секогаш е 0.

б) Со користење на асоцијативно својство ги групираш броевите различно: $(-7 + (-5)) + 12$, $(-7) + ((-5) + (+12))$, $(-7 + (+12)) + (-5)$ и повторно вкупниот број на освоени бодови е 0. Без разлика на редоследот (комутативност) или начинот на групирање (асоцијативност), резултатот останува 0. Значи, заедно играчите немаат добивка, ниту загуба на бодови!

Задача 3

Запиши низа од шест цели броеви со прв член 11, а секој нареден се добива со додавање на бројот -5 на претходниот број (член). Секој нареден член пресметај го на два начини. Кое својство ќе го користиш?

Кога собираш два негативни броја, каков ќе биде конечниот резултат? Дали ќе добиеш поголем негативен број или конечниот резултат ќе биде помал од собираците? Објасни го твојот одговор со примери. Размисли и за тоа како влијаат комутативното и асоцијативното својство врз собирањето на цели броеви. Како можеш да ги примениш овие својства во твоите секојдневни активности?

Одговори на следните прашања во твојата тетратка:

1. Што ново научив денес?
2. Кои делови од лекцијата ми беа најразбирливи?
3. На кои места имав тешкотии?

На скала од 1 до 5, оцени се самиот колку успешно ја совлада лекцијата:

- 1 - Воопшто не разбрав
- 2 - Разбрав делумно
- 3 - Разбрав, но имам потреба од дополнителна помош
- 4 - Разбрав и можам да применам
- 5 - Разбрав целосно и можам да поучам некој друг

Напиши еден или два чекора што можеш да ги направиш за да го подобриш своето разбирање на лекцијата, ако е потребно.

Самостојна работа

1. Ако $(-199) + (+101) = -98$, тогаш колку е $(+101) + (-199)$?
2. Покажи дека е точно равенството $a + b = b + a$, за $a = -54$, $b = -15$.
3. Кој број треба да стои на местото на x за да биде точно равенството:
 $((-32) + (+17)) + (-20) = (-32) + (x + (-20))$?
4. Запиши го асоцијативното својство на операцијата собирање на цели броеви, а потоа провери ја точноста на истото за броевите -14 , $+11$ и -10 .
5. Пресметај ја вредноста на изразот со примена на комутативното и асоцијативното својство: $(-3) + (-2) + 0 + (+1) + (+2) + (+3) + (+4)$.
6. Кој број треба да стои наместо $*$? Кое својство го користеше?
 а) $(-23) + (+17) = (+17) + *$ б) $(-217) + * = (-15) + (-217)$
7. Ако е познато дека $((-16) + (+11)) + (-30) = -35$, тогаш колку е $(-16) + ((+11) + (-30))$?
8. Нека $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$. Со користење на својствата на операцијата собирање на цели броеви пресметај го збирот на елементите од множеството A .

Равенки од видот $x + a = b$. Одземање на цели броеви

Денес ќе се запознаеш со основните концепти на равенките од видот $x + a = b$ кои се важен дел од решавањето математички проблеми.

Оваа равенка помага да најдеме непозната вредност, означена со x , при познати броеви a и b . Во овој процес ќе научиш како да ја применуваш операцијата одземање на цели броеви за да ја одредиш вредноста на x .

Кога имаш равенка како $x + a = b$, целта е да ја изолираш променливата x на едната страна од равенката. За да го постигнеш ова, ќе ги користиш правилата на одземање, што ќе ти овозможи да го одредиш решението на равенката.



Оваа лекција не само што ќе ти помогне да разбереш како функционираат равенките, туку и како да применуваш математички операции во секојдневниот живот.

Пример 1

Реши ја равенката $x + 36 = 44$ во $\mathbb{Z}$.

Решение:

Бидејќи x е непознат собирок, тој е еднаков на разликата од збирот и познатиот собирок, односно $x = 44 - 36$ или $x = 8$.

Проверка: $8 + 36 = 44$.

Што се случува со овие поими во множеството на цели броеви?

Пример 2

Реши ја равенката $x + 17 = 11$ во множеството на цели броеви.

Решение:

Оваа равенка ќе ја решиме со додавање на бројот -17 на двете страни од равенката. Така: $x + 17 + (-17) = 11 + (-17)$, односно $x + 0 = -(17 - 11)$. Значи, $x = -6$.

За $a, b \in \mathbb{Z}$, секоја равенка од облик $x + a = b$ има решение $x = b + (-a)$ во $\mathbb{Z}$.

Задача 1

Решете ги во $\mathbb{Z}$ равенките:

а) $x + (-53) = 108$ б) $x + 136 = 190$ в) $103 + x = -82$ г) $-160 + x = 115$.

Решение на равенката $x + a = b$ во $\mathbb{Z}$ го нарекуваме бројот кој е разлика на b со a . На ист начин ја дефинираме и разликата на два цели броја, односно одземањето во $\mathbb{Z}$.

Да одземеме еден цел број b од друг број a , значи на намаленикот да го додадеме спротивниот број на намалителот. За $a, b \in \mathbb{Z}$, ја дефинираме разликата $a - b$ да биде збирот $a + (-b)$.

Пример 3

Пресметај: а) $54 - 38$ б) $(-48) - 23$ в) $139 - (-110)$ г) $(-305) - (-227)$.

Решение:

а) $54 - 38 =$ Според дефиницијата за одземање на цели броеви $= 54 + (-38) = 16$

б) $(-48) - 23 = (-48) + (-23) = -71$ в) $139 - (-110) = 139 + (+110) = 249$

г) $(-305) - (-227) = (-305) + (+227) = -78$

Задача 2

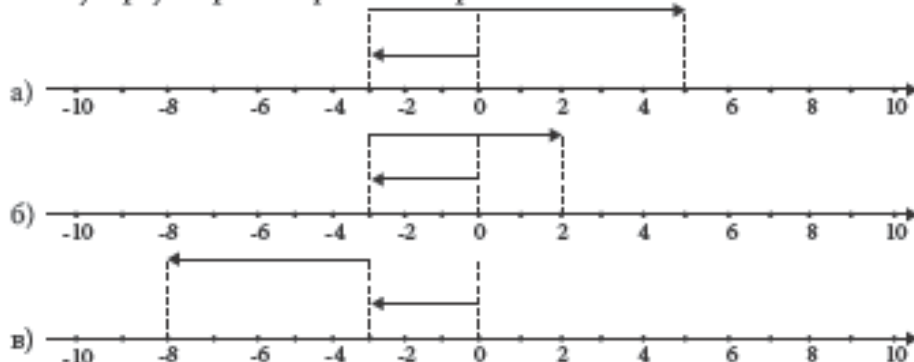
Објасни го тврдењето: Разликата на кои било два цели броја пак е цел број.

Задача 3

Пресметај: а) $35 - 457$ б) $(-97) - 38$ в) $244 - (-310)$ г) $(-125) - (-98)$.

Задача 4

На која бројна права е претставена разликата $-3 - 5$:



Пример 4

Марко имал одредена сума пари. Тој купувал со картичка и по потрошената сума од 236 денари забележал дека е во долг кон банката од 43 денари. Колку денари имал на почетокот?

Решение:

Нека x биде сумата на парите што Марко ја имал на почетокот. Тогаш можеме да ја составиме равенката: $x - 236 = -43$

За да го најдеме, на двете страни од равенката го додаваме спротивниот број на -236 , односно 236, па така ја додиваме равенката $x - 236 + 236 = -43 + 236$, $x = +193$.

Марко имал 193 денари на почетокот.

Пример 5

- Јетон има долг од 2300 денари. По некое време тој успева да го намали долгот за 1400 денари. Како може да се запише оваа ситуација со одземање на цели броеви? Колку денари уште му остануваат да врати?
- Јасна има долг од 2300 денари и дополнително се задолжува со уште 1420 денари. По некое време таа успева да го намали долгот за 3800 денари. Како може да се запише оваа ситуација со операции со цели броеви? Каква е состојбата на сметката на Јасна по намалувањето на долгот?

Решение:

- Објасни како се добива бројниот израз соодветен на опишаната ситуација на Јетон
 $(-2300) - (-1400) = (-2300) + (+1400) = -900$. Значи, на Јетон му остануваат 900 денари долг за враќање.
- $(-2300) + (-1420) - (-3800) = (-2300) + (-1420) + 3800 = (-3720) + (+3800) = +80$.
 Значи, Јасна не должи повеќе и има 80 денари на својата сметка. Кој дел од изразот го определува долгот на Јасна по дополнителното задолжување? Колку изнесувал тој?

Пример 6

Мите добил задача на збирот на броевите 3792 и -4657 да ја додаде разликата на броевите -8461 и 4966. Провери дали Мите точно ја решил задачата и ако има потреба, коригирај.

Решение:

Мите прво го пресметал збирот на броевите 3792 и -4657 , односно $3792 + (-4657) = -865$.

Потоа ја нашол разликата на броевите -8461 и 4966, односно

$$-8461 - 4966 = -8461 + (-4966) = -13427.$$

Според барањето на задачата, тој го собрал добиениот збир на првите два броја со разликата на другите два броја, односно $-865 + (-13427) = -14292$.

Задача 5

Јована има 330 денари во негативен износ на својата банкарска сметка (односно е „во минус“). Таа позајмува уште 48 денари од пријателка за да покрие некои трошоци. Потоа, нејзиниот брат ѝ враќа 470 денари што ѝ ги должел. Запиши броен израз со собирање и одземање на цели броеви и определи ја неговата бројна вредност. Колку денари има Јована на сметката по овие промени?

Задача 6

Од збирот на најмалиот позитивен двоцифрен број и најмалиот негативен двоцифрен број извади ја разликата на најмалиот позитивен трицифрен број со најголемиот негативен трицифрен број.

Како ќе ја решиш равенката $x + a = b$ во множеството на цели броеви?

Објасни зошто одземањето на цели броеви може да се запише како собирање со спротивен број.

Запиши во твојата тетратка

Дали разбрав? Оцени се на скала од 1 до 5:

- 1: Воопшто не разбрав.
- 2: Разбрав малку.
- 3: Разбрав, но не се чувствувам сигурно.
- 4: Разбрав добро, можам да им објаснам на другите.
- 5: Сè ми е јасно, се чувствувам како експерт!

Прашања за размислување:

1. Која беше најинтересната работа што ја научив?
2. Како можам да го применим ова знаење во секојдневниот живот?
3. Дали имам прашања или нешто што не ми е јасно?

За секоја оцена од 4 или 5, нацртај ѕвезда, „ѕвезда на знаење“.

Можеш да ја споделиш својата оцена и еден интересен факт што си го научил со твоите соученици.

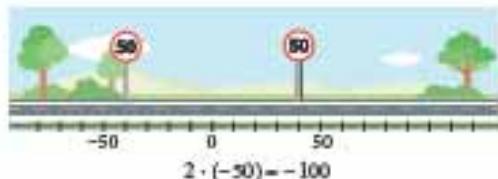
Самостојна работа

1. Реши ја равенката $x + 15 = 27$ со додавање на спротивниот број на бројот 15 од двете страни на равенката.
2. Реши ги равенките:
 а) $x + (-34) = -29$ б) $(+32) + x = -8$ в) $x + (+11) = -33$ г) $(-76) + x = 5$
3. Пресметај:
 а) $(+24) - (+25)$ б) $(-67) - (+60)$ в) $(+55) - (-5)$ г) $(-102) - (-2)$
 д) $(+8) - (-13)$ е) $(-49) - (+11)$ ж) $(-84) - (-10)$ з) $(-200) - (+10)$
4. Реши ги равенките:
 а) $x - (+14) = -37$ б) $(-200) - x = -7$ в) $(+31) - x = +40$ г) $x - (-22) = -13$
5. Ако на -15 се додаде некој број, се добива разликата на броевите -7 и $+15$. Кој е тој број?
6. Од разликата на броевите -15 и $+10$ одземи го нивниот збир.
7. Кој број треба да се додаде на збирот на броевите 88 и -52 за да се добие збирот на броевите -44 и -52 ?

Множење цели броеви

Во оваа лекција ќе истражуваш како да множиш цели броеви со исти и различни знаци. Множењето е важна математичка операција која не само што ти помага да решаваш проблеми, туку и да развиваш логичко размислување. Правилата за множење на цели броеви со исти или различни знаци ќе ти помогнат да разбереш како да ги решаваш различните математички задачи поврзани со множењето.

Токму во оваа лекција ќе работиш на проблеми кои ќе ти помогнат да ги примениш овие правила и да бидеш сигурен во твоите способности за работа со цели броеви.



Пример 1

Пресметај $(+72) \cdot (+9)$.

Решение:

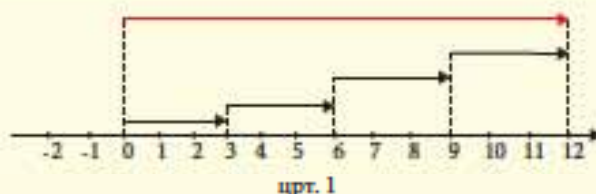
Бидејќи множеството на позитивните цели броеви е еднакво на множеството на природни броеви, односно $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, операцијата множење во множеството $\mathbb{N}$ ја разгледуваме и како операција множење во $\mathbb{Z}^+$. Со други зборови, множењето на позитивни цели броеви е исто како и множењето на природните броеви. Така: $(+72) \cdot (+9) = 72 \cdot 9 = 648$, затоа што $+72 = 72$ и $+9 = 9$.

Пример 2

Разгледај го движењето на точка по бројната права, одлево-надесно, така што за секоја секунда минува 3 единици. Ако сега точката е во 0, каде ќе се најде по 4 секунди?

Решение:

Бидејќи движењето на бројната права е надесно (позитивна насока), по 4 секунди точката ќе биде во бројот 12, односно $(+3) \cdot 4 = +|3 \cdot 4| = +12 = 12$. Тоа е претставено на бројната оска на црт. 1.

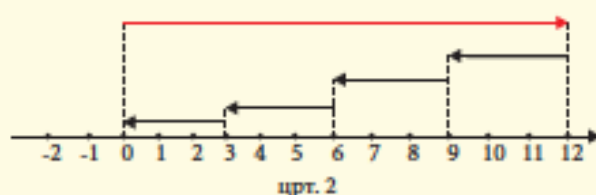


Пример 3

Разгледај го движењето на точка по бројната права оддесно-налево, така што за секоја секунда минува 3 единици. Ако сега точката е во 0, каде била пред 4 секунди?

Решение:

Бидејќи движењето на бројната права е налево (негативна насока), пред 4 секунди (минато, негативна насока) точката била на позитивниот дел од бројната права. Размислуваме вака: пред 1 секунда била на 3 единици оддесно; пред 2 секунди била на $2 \cdot 3$ единици оддесно, и пред 3 секунди била на $3 \cdot 3$ единици оддесно, пред 4 секунди била на $4 \cdot 3$ единици оддесно, односно била на бројот 12. Бидејќи движењето на точката е 3 единици налево во секунда („-3 единици“), а се бара положбата на точката пред 4 секунди („-4 секунди“), заклучуваме дека производот на овие два негативни броја е $(-3) \cdot (-4) = +|3 \cdot 4| = +12 = 12$. Ова е прикажано на црт. 2. Производот на два цели броја со исти знаци е еднаков на производот од нивните апсолутни вредности (како природни броеви) со позитивен знак.



Според пример 2 и 3, може да се запише:

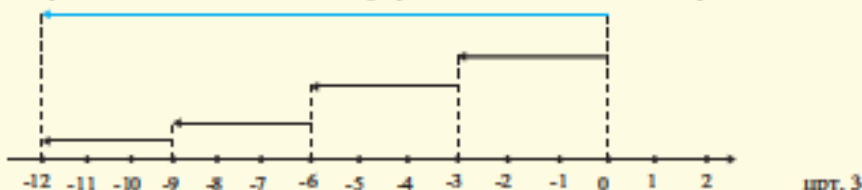
За $a, b \in \mathbb{Z}$, два истовремено позитивни или истовремено негативни броја, важи $a \cdot b = |a| \cdot |b|$.

Пример 4

Разгледај го движењето на точка по бројната права, оддесно-налево, така што за секоја секунда минува 3 единици. Ако сега точката е во 0, каде ќе се наоѓа по 4 секунди?

Решение:

Во овој случај движењето по бројната права е налево (негативна насока), а се бара положбата по 4 секунди (иднина, „позитивно време“). Од црт. 3 се заклучува дека по 4 секунди точката ќе биде на бројот -12 . Можеме да заклучиме дека $(-3) \cdot 4 = -|3 \cdot 4| = -12$.

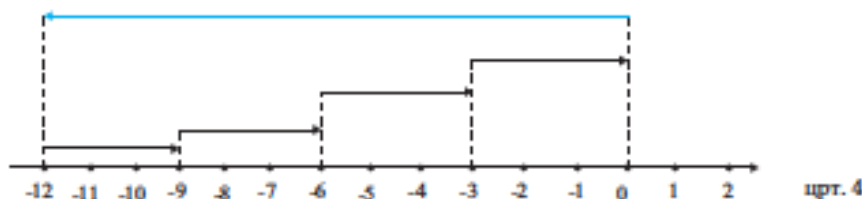


црт. 3

Пример 5

Разгледај го движењето на точка по правата, одлево-надесно, така што за секоја секунда минува 3 единици. Ако сега точката е во 0, каде била пред 4 секунди?

Во овој случај движењето по бројната права е надесно (позитивна насока), а се бара положбата пред 4 секунди. Од црт. 4 може да се заклучи дека пред 4 секунди точката била на бројот -12 . Можеме да запишеме $3 \cdot (-4) = -|3 \cdot 4| = -12$.



црт. 4

Со решавање на примерите 4 и 5 се забележува дека:

Производот на два цели броја со различни знаци е негативниот број чија апсолутна вредност е еднаква на производот од апсолутните вредности на двата броја (како производ на природни броеви). Односно, за $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, два цели броја со различни знаци (едниот позитивен, другиот негативен), важи $a \cdot b = -(|a| \cdot |b|)$.

Знаци на множителите	Знак на производот	Операција меѓу апсолутните вредности на броевите	пример
$\oplus \cdot \oplus$	$+$	множење	$(+2) \cdot (+3) = +6$
$\ominus \cdot \ominus$	$+$		$(-2) \cdot (-3) = +6$
$\oplus \cdot \ominus$	$-$		$(+2) \cdot (-3) = -6$
$\ominus \cdot \oplus$	$-$		$(-2) \cdot (+3) = -6$

Задача 1

Пресметај ги производите:

- а) $(+72) \cdot (+27)$ б) $(+108) \cdot (+49)$ в) $(-105) \cdot (-63)$ г) $(-5086) \cdot (-309)$
 д) $(+12) \cdot (-6)$ е) $(-36) \cdot (+5)$ ж) $(-256) \cdot (+28)$ з) $(+408) \cdot (-105)$

Пример 6

Производот на броевите -62 и $+806$ намали го за бројот -2686 .

Решение:

Производот на броевите -62 и $+806$, односно $(-62) \cdot (+806) = -(|62| \cdot |806|) = -49972$.

Добиениот производ треба да се намали за бројот -2686 , односно

$-49972 - (-2686) = -49972 + (+2686) = -47286$.

Пример 7

Еден зимски ден напладне температурата била -7°C , а вечерта била 3 пати пониска. Колкава била температурата вечерта?

Решение:

$(-7) \cdot 3 = -21$, значи температурата вечерта била -21°C .

Задача 2

Даниела работи како дизајнер во висока зграда чии катови се означени со броеви од -3 до 18 . Таа треба да ги уредува сите катови, па затоа се движи со лифтот повеќе пати, нагоре и надолу. Почнувајќи од 10 . кат, таа се симнува 3 пати по 4 ката надолу. На кој кат е сега Даниела?

Како би ја објаснил разликата во производот на два позитивни цели броја и производот на еден позитивен и еден негативен цел број? Зошто е важно да разбереш како влијаат знаците врз конечниот резултат при множење?

Во тетратката направи табела со три колони со наслови „Наслов на лекција“, „Степен на разбирање“ и „Прашања/Коментари“.

За наслов на лекција запиши „Множење на цели броеви“.

Во втората колона оцени го твоето разбирање со една од следниве опции:

✓ Многу добро разбираам, + Добро разбираам, ? Имам нешто нејасно, X Не разбираам

Во третата колона запиши најмалку едно прашање или коментар што го имаш за темата. Ова може да биде нешто што не го разбираш, нешто што ти е интересно или некоја врска што си ја направил со секојдневниот живот.

На крајот можеш да ги споделиш своите одговори, особено прашања или коментари со своите соученици. Ова ќе ти помогне во размена на идеи и дополнително разбирање на темата.

Самостојна работа

- Претстави го производот $(+3) \cdot (-2)$ на бројната права.
- Броевите $+15$ и $+3$ се помножени на следниот начин
 $(+15) \cdot (+3) = +(|+15| \cdot |+3|) = +(15 \cdot 3) = +45$
 На истиот начин пресметај $(-9) \cdot (-12)$.
- Пресметај:
 а) $(+9) \cdot (+2)$ б) $(+21) \cdot (+31)$ в) $(-11) \cdot (-6)$ г) $(-15) \cdot (-15)$ д) $(-11) \cdot (-18)$
- Кој број треба да стои наместо *?
 а) $(-13) \cdot 0 = *$ б) $* \cdot (+456) = 0$ в) $(-237) \cdot 0 = *$
- Ако на некој број му се додаде $+37$, ќе се добие производот на броевите -13 и -2 . Кој е тој број?
- Најди го производот на броевите 1) $+3$ и -2 2) $+4$ и -2
 а) на бројната права б) со користење апсолутна вредност на броевите.
- Каков број ќе се добие (позитивен, негативен или нула) ако се помножат:
 а) Еден позитивен и еден негативен број?
 б) Два негативни и еден позитивен број?
 в) Три негативни броја и нула?
 г) Три негативни броја и два позитивни броја?

8. Спореди со помош на знаците $<$, $>$ или $=$.

- а) $(-11) \cdot (+3)$ и 0 б) $(-12) \cdot (-4)$ и 0
в) $(-17) \cdot 0$ и 0 д) $(+97) \cdot (-97)$ и 0.

9. Најди ја вредноста на $(-9) \cdot x$ за:

- а) $x = +14$ б) $x = +1$ в) $x = 0$ г) $x = -1$

10. Запиши го како збир производот $(-4) \cdot (+5)$, а потоа пресметај го.

11. Производот на броевите -23 и 2 намали го за разликата на броевите -16 и $+14$ помножена со нула.

12. Запиши го збирот како производ, а потоа пресметај.

- а) $(-15) + (-15) + (-15) + (-15)$ б) $(-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7)$

13. Пресметај:

- а) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$ б) $(-8) \cdot (-7) \cdot (-6) \cdot (+2) + (-4) \cdot (-3)$

Својства на операцијата множење цели броеви

Во оваа лекција ќе се запознаеш со својствата на операцијата множење на цели броеви. Како што знаеш, множењето е една од основните математички операции, а исто така и една од најчесто користените во секојдневниот живот. Без разлика дали работиш со позитивни или негативни броеви, правилата за множење се важни за правилно решавање на математичките задачи. Во оваа лекција ќе ги истражиш различните својства на множењето, како што се комутативноста, асоцијативноста и дистрибутивноста, и како тие се применуваат кога работиш со цели броеви. Ќе научиш како да ги применуваш овие својства за да ги олесниш пресметките.



Во твојата тетратка направи мисловна мапа за својствата што ги знаеш во множеството на природни броеви.

За множењето во $\mathbb{N}$ знаеш дека е комутативно и асоцијативно, а исто така е и дистрибутивно во однос на собирањето, па истите својства ќе важат и за множењето на ненегативните броеви. Дали тие својства важат за произволни цели броеви?

Пример 1

Пресметај ги производите: $(-5) \cdot (-4)$ и $(-4) \cdot (-5)$ и потоа спореди ги.

Решение:

Од начинот како е дефинирано множењето се добива дека $(-5) \cdot (-4) = 20 = (-4) \cdot (-5)$.

За секои $a, b \in \mathbb{Z}$ важи $a \cdot b = b \cdot a$, односно производот на два цели броја не се менува ако множителите си ги променат местата.

Кажано со други зборови, множењето на цели броеви е комутативна операција.

Задача 1

Провери го равенството $a \cdot b = b \cdot a$ за:

а) $a = 352, b = -52$; б) $a = -589, b = 67$; в) $a = -2080, b = -84$.

Пример 2

Пресметај ги производите $[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9)$ и $(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)]$.

Решение:

$$[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9) = (-|43 \cdot 6|) \cdot (-9) = (-258) \cdot (-9) = |258 \cdot 9| = 2322.$$

$$(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)] = (-43) \cdot (-|6 \cdot 9|) = (-43) \cdot (-54) = |43 \cdot 54| = 2322.$$

Производите се еднакви.

За секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$ важи: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, односно производот на целите броеви не зависи од начинот на групирањето на множителите.

Кажано со други зборови, множењето на цели броеви е асоцијативна операција.

Задача 2

Провери го равенството $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ за:

а) $a = (-198), b = -50, c = 22$ б) $a = 115, b = -48, c = 75$.

Пример 3

Пресметај: $(156 + 82) \cdot (-7)$ и $[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)]$. Што забележа?

Решение:

$$(156 + 82) \cdot (-7) = 238 \cdot (-7) = -|238 \cdot 7| = -1666;$$

$$[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)] = (-|156 \cdot 7|) + (-|82 \cdot 7|) = (-1092) + (-574) = -(1092 + 574) = -1666.$$

Може да се забележи дека вредностите на двата бројни изрази се еднакви.

За секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$ важат равенствата:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ и } (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Поради комутативноста на множењето и собирањето, важат и:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \text{ и } c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$$

Кажано со други зборови, множењето на целите броеви е дистрибутивно во однос на собирањето и одземањето (во случаите кога одземањето е изводливо).

Задача 3

За $a = -12$, $b = 40$, $c = -15$, $m = 25$, провери ја точноста на равенството:

$$(a + b - c) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m - c \cdot m$$

Пример 4

Една компанија за производство на топла облека има загуби (компанијата „е во минус“) во текот на зимските месеци. Во јануари компанијата има загуба од 3000 евра („е во минус“ 3000 евра), а во февруари загубата е 2000 евра. Компанијата одлучува да ги пресмета вкупните загуби за двата месеца, но исто така сака да пресмета колку би биле загубите во летната сезона кога би се зголемиле 3 пати во споредба со месеците јануари и февруари заедно. Пресметај ги вкупните загуби на компанијата во летната сезона на два начина.

Решение:

Начин 1: $((-3000) + (-2000)) \cdot 3 = (-5000) \cdot 3 = -15000$. Вкупната загуба за двата месеца (јануари и февруари) е $(-3000) + (-2000) = -5000$, а за очекуваното зголемување на загубата 3 пати и се добива $(-5000) \cdot 3 = -15000$ евра вкупна загуба во летната сезона.

Начин 2: $((-3000) + (-2000)) \cdot 3 = (-3000) \cdot 3 + (-2000) \cdot 3 = (-9000) + (-6000) = -15000$
 $(-3000) \cdot 3 = -9000$ загуба која се очекува во летната сезона во споредба со месец јануари,
 $(-2000) \cdot 3 = -6000$ загуба која се очекува во летната сезона во споредба со месец февруари,
па вкупната загуба што се предвидува за летната сезона е $(-9000) + (-6000) = -15000$.

Задача 4

Студентски ресторан нуди мени за студенти по поволни цени. Во менито има 3 пирожки и 2 чаши зеленчуково смути. Еден студент купува 4 такви менија, а друг зема 12 пирожки и 8 чаши смути. Дали и двајцата студенти купиле ист број производи?

Кое својство и како е искористено за олеснување на пресметката во бројниот израз $1997 \cdot (-4) = (2000 - 3) \cdot (-4) = 2000 \cdot (-4) - 3 \cdot (-4)$?

Наведи примери во кои може да се искористат својствата за множење на цели броеви при пресметувања во конкретна ситуација од секојдневниот живот.

Прецртај ја табелата во твојата тетратка и стави еден од знаците за секое својство:

☒ - го разбираам и можам да го објаснам, ☐ - малку не ми е јасно ☐ - не го разбираам

Комутативно својство	Асоцијативно својство	Дистрибутивно својство

Под табелата запиши пример за својството/ата за кој/и си ставил/а знак ☒

Самостојна работа

- а) Запиши го комутативното својство на операцијата множење на цели броеви.

б) Ако $(-11) \cdot (+12) = -132$, тогаш колку е $(+12) \cdot (-11)$?
- Користејќи го асоцијативното својство, одреди кој број треба да стои наместо * во равенствата.

а) $((-99) \cdot (+28)) \cdot (-14) = * \cdot ((+28) \cdot (-14))$

б) $(+19) \cdot ((* \cdot (-47))) = ((+19) \cdot (-38)) \cdot (-47)$
- Провери го асоцијативното својство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, ако $a = -9$, $b = -4$, $c = -10$.
- а) Колку изнесува x ако $(-45 + x) \cdot (-2) = (-45) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2)$?

б) Ако $(-18 + 8) \cdot (-3) = 30$, тогаш колку е $(-18) \cdot (-3) + (+8) \cdot (-3)$?
- Пресметај на најлесен можен начин $(+50) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot (+4)$
- Искористи го дистрибутивното својство и пресметај:

а) $3 \cdot 11 + 3 \cdot 22$ б) $(-14) \cdot (-8) + (-14) \cdot (-2)$
- Пресметај ја вредноста на изразот со претходно користење на дистрибутивното својство: $4 \cdot (-8) + 2 \cdot (-8) + 5 \cdot (-8)$

Делење цели броеви

Во секојдневието често се среќаваш со ситуации каде што треба да поделиш нешто на еднакви делови. На пример, ако имаш 12 јаболка и сакаш да ги поделиш еднакво меѓу 4 пријатели, секој ќе добие по 3 јаболка. Ова е едноставен пример за делење во множеството на природни броеви.

Но, што се случува кога работиме со цели броеви кои вклучуваат и негативни броеви? Дали истите правила важат и кога делиме негативен број? Во оваа лекција ќе истражувањето како функционира делењето во множеството на цели броеви, кои се правилата за знаците и како можеш да го примениш ова знаење во различни ситуации.

Важно е да разбереш дека операцијата делење не е секогаш изводлива во множеството природни броеви, па така и во множеството цели броеви постојат ограничувања. Како што делењето во множеството на природни броеви (N) е дефинирано преку множењето, така и делењето во множеството на цели броеви (Z) се заснова на истиот принцип.

Преку оваа лекција ќе научиш како да разликуваш изводливи и неизводливи делења, како да одредиш количник и како правилно да ги примениш операциите со цели броеви во практични примери.



Пример 1

Ана, Бојан и Виктор собрале 168 плодови од овошната градина и одлучиле да ги поделат во три пакети.

- Дали бројот на плодови во секој од трите пакети што сакаат да ги направат би бил природен број?
- Колку плодови ќе има во секој пакет?
- Ако уште двајца пријатели им се придружат и сакаат да направат пакети за секој од нив со ист број на плодови, дали делењето е возможно во множеството на природни броеви?

Решение:

- За да провериме дали тројцата ќе добијат природен број на плодови, всушност, треба да провериме деливост на 168 со 3, а според признакот за деливост со 3, тоа е исполнето, па значи во секој од трите пакети ќе има природен број плодови.
- $168 : 3 = 56$. Значи, ако направат 3 пакети, секој ќе содржи 56 плодови.
- Ако уште двајца пријатели им се придружат, тогаш бројот на пакети треба да се зголеми на 5. Бројот 168 не е делив со 5. Зошто? Дали ќе се добие природен број?

Делењето во множеството на природни броеви ни помага да организираме предмети во еднакви групи. Во овој случај, бројот на пакети зависи од тоа колку луѓе учествуваат во поделбата.

Нека a, b се два цели броја ($a, b \in \mathbb{Z}$). Да се подели бројот a со бројот b значи да се најде цел број c (ако постои таков), таков што $b \cdot c = a$. Ако постои таков цел број c , него го викаме количник, а b го викаме делител. Тогаш велиме дека b е делител на a и пишуваме $b \mid a$.

Пример 2

Најди цел број x (ако постои) за кој $12 \cdot x = 84$.

Решение:

Делиме $84 : 12$ и добиваме дека $x = 7$.

При делењето на два цели броја има два случаи. Првиот случај е кога деленикот и делителот имаат исти знаци (двата позитивни или двата негативни). Вториот случај е кога деленикот и делителот имаат различни знаци.

Пример 3

Да го пресметаме непознатиот број во равенката:

а) $8 \cdot x = 128$ б) $(-15) \cdot x = 165$

Решение:

а) Производот на равенката $8 \cdot x = 128$ е позитивен број. За да се добие позитивен производ, мора и двата множители да бидат позитивни или и двата негативни. Бидејќи бројот 8 е позитивен, тогаш и непознатиот број x е позитивен.
 $x = |128 : 8| = 16$, затоа што $16 \cdot 8 = 128$.

б) Равенката $(-15) \cdot x = 165$ има еден негативен множител. За да биде производот позитивен (+165), вториот множител, бројот x , мора да биде негативен.
 $x = 165 : (-15) = -|165 : 15| = -11$, затоа што $(-11) \cdot (-15) = +|11 \cdot 15| = +165$.

Својството од примерот се искажува во општ случај како:

Количникот на два цели броја со исти знаци, ако постои во $\mathbb{Z}$ е позитивен број.
 Ако $a, b \in \mathbb{Z}^+$ или $a, b \in \mathbb{Z}^-$ и $b \mid a$, тогаш: $a : b = |a| : |b|$.

Пример 4

Да го пресметаме непознатиот број x :

а) $(-13) \cdot x = -260$ б) $x \cdot 23 = -184$

а) Решението на равенката е позитивен број. Бидејќи производот -260 е негативен, множителите мора да се со различни знаци. Бидејќи -13 е негативен, тогаш x мора да биде позитивен. Пресметуваме: $x = (-260) : (-13) = |260 : 13| = 20$.
 Проверка: $(-13) \cdot (+20) = -260$.

- б) Решението на равенката е негативен број. Бидејќи производот -184 е негативен, множителите мора да имаат различни знаци. Бројот 23 е позитивен, па според тоа x мора да биде негативен, $x = (-184) : 23 = -|184 : 23| = -8$.
Проверка: $(-8) \cdot 23 = -184$.

Количникот на два цели броја со различни знаци, ако постои во Z е негативен број. Ако $a \in Z^+$, $b \in Z^-$ или $a \in Z^-$, $b \in Z^+$ и $b|a$, тогаш: $a : b = -(|a| : |b|)$, каде што делењето $|a| : |b|$ е делење на природни броеви.

Пример 5

Најди цел број (ако постои) за кој $7 \cdot x = 37$.

Решение:

Бидејќи бројот 37 не може да се претстави како производ од 7 и некој друг цел број, таков цел број x не постои. Велеме дека ова делење не е изводливо во Z .

Задача 1

Пресметај ги количниците:

- а) $1248 : 24$ б) $(-96) : (-8)$ в) $2016 : 32$ г) $(-338) : (-26)$
 д) $(-80) : 5$ е) $1856 : (-29)$ е) $(-364) : 14$ ж) $2117 : (-73)$

Задача 2

Ако $a \in Z$, објасни зошто:

- а) $a : 1 = a$ б) $a : 0$ не постои или нема смисла в) $a : (-1) = -a$
 г) $a : a = 1$ за $a \neq 0$ д) $0 : a = 0$ за $a \neq 0$ е) $a : (-a) = -1$ за $a \neq 0$

Пример 6

Една фирма, поради неуспешна рекламна кампања, забележала финансиска загуба од 84000 денари. Оваа загуба, која може да се претстави како негативен број (-84000) , е распределена еднакво меѓу 7 маркетинг-проекти. Одреди по колку денари биле во загуба со секој проект.

Решение:

Загубата е дадена како негативен број (-84000) , а бројот на проекти е позитивен $(+7)$.

При делењето на два цели броја со различни знаци, количникот ќе биде негативен.

$$x = (-84000) : 7 = -12000$$

Проверка: $(-12000) \cdot 7 = -84000$ е во согласност со дадената загуба.

Секој маркетинг-проект носи загуба од 12000 денари.

Задача 3

Во играта Томе добил негативен резултат од (-90) бода поради неуспешни скокови. Ако овој негативен резултат се распределува еднакво на 5 скока, одреди колку поени губел Томе на секој скок.

Што мислиш, како правилното разбирање на операцијата делење на цели броеви, особено кога работиме со негативни броеви, може да ти помогне да донесеш појасни одлуки во секојдневниот живот, на пример, при распределбата на трошоци или ресурси?

„Математички семафор“

Во твојата тетратка:

1. Стави црвено  (Значи: Потребна ми е помош!)
Напиши едно прашање или дел што ти е најнејасен.
2. Жолто  (Значи: Разбирам делумно, но имам некои сомнежи!)
Напиши еден проблем што можеш да го решиш и еден што ти создава тешкотии.
3. Зелено  (Значи: Разбирам и можам да му објаснам на другар!)
Напиши еден свој пример на проблем со делење на цели броеви и негово решение.

Самостојна работа

1. Пресметај:

а) $(+56) : (+8)$	б) $(-36) : (-12)$	в) $(+117) : (-1)$	г) $(-585) : (-15)$	д) $(+54) : (-9)$
е) $0 : (-12)$	ж) $(+374) : (-1)$	з) $(-148) : (+37)$	и) $(-32) : (+8)$	о) $(+200) : (-10)$
2. Најди ја вредноста на $y : 12$ за: а) $y = 48$ б) $y = -156$
3. Реши ги равенките:

а) $(-88) : x = 8$	б) $(+45) \cdot x = -540$	в) $(-533) \cdot x = +41$	г) $x \cdot (+79) = -790$
--------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------
4. Разликата на броевите -27 и 9 подели ја со нивниот збир.
5. Ако некој број се помножи со -24 , ќе се добие производот на броевите -8 и 21 . Кој е тој број?
6. Билјана замислила број. Кога тој број го помножила со збирот на броевите -14 и 44 , го добила количникот на броевите -390 и 13 . Кој број го замислила Билјана?
7. Што може да се заклучи за деленикот и делителот на два цели броја ако:

а) нивниот количник е $+1$?	б) нивниот количник е -1 ?	в) нивниот количник е 0 ?
------------------------------	------------------------------	-----------------------------
8. Кој број се добива ако количникот на броевите $+65$ и -13 се зголеми за количникот на броевите -50 и -10 ?

Вредност на броен израз

Замисли дека си во продавница и треба да пресметаш колку ќе платиш ако купиш 3 чоколади по 50 денари и 2 сока по 80 денари. Наместо да ги пресметуваш одделно, можеш да составиш израз: $3 \cdot 50 + 2 \cdot 80$.

Кога ќе ја пресметаш вредноста на овој израз, добиваш точен износ за плаќање. Ова е пример за бројна вредност на израз – конечниот резултат што се добива кога ќе ги извршиш операциите.

Во оваа лекција ќе научиш: што е броен израз; како да ја пресметаш неговата бројна вредност и како правилно да го применуваш редоследот на операциите.

На крајот од лекцијата ќе можеш брзо и точно да пресметуваш вредности на бројни изрази и да ги користиш во секојдневни ситуации.



2744,24	200,31	241,00	23,80
2744,24	200,31	241,00	23,80
1798,00	1,000,00	1,500,00	0,00
1798,00	1,000,00	1,500,00	0,77
1798,00	1,000,00	1,500,00	0,00
1798,00	2,000,00	1,500,00	0,00
1798,00	2,000,00	1,500,00	0,00
1798,00	100,00	0,00	1,00

Пример 1

Марија штеди пари за нова книга. Таа секоја недела става по 250 денари во касичката. По 4 недели нејзината баба ѝ додала уште 600 денари.

- Состави броен израз што го претставува вкупниот износ што Марија ќе го има по 4 недели.
- Пресметај ја бројната вредност на изразот.

Решение:

- Прво се пресметува сумата што Марија ќе ја има по четири недели од нејзиното штедење: $4 \cdot 250$, на оваа сума ги додаваме парите од баба ѝ и го добиваме бројниот израз: $(4 \cdot 250) + 600$.
- Пресметуваме бројна вредност: $1000 + 600 = 1600$ денари.
Марија ќе има 1600 денари по 4 недели. Овој проблем ти помага да се потсетиш како се составува броен израз и како правилно се пресметува неговата бројна вредност во множеството на природни броеви.

Задача 1

Збирот на броевите 1326 и 879 намали го за разликата на броевите 453 и 191.

Изрази образувани од броеви, сврзани со знаците на математичките операции (може да содржат и загради) се викаат бројни изрази. Бројот што се добива по извршувањето на сите операции во бројниот израз се вика бројна вредност на изразот.

Често се вели дека два бројни изрази се еднакви ако тие имаат еднакви бројни вредности.

Пример 2

Пресметај ја бројната вредност на изразот: $5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)]$

Решение:

$$5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - 48 : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - (-6)] = 5 \cdot [(-21) + (+6)] = 5 \cdot (-15) = -75$$

При пресметувањето на вредноста на броен израз треба да се знае следното:

1. Операциите собирање и одземање се нарекуваат операции од прв ред, а операциите множење и делење операции од втор ред. Операцијата степенување често се нарекува операција од трет ред.
2. Во бројни изрази без загради, составени само од операции од прв ред или само од операции од втор ред, се прави договор, предност да имаат операциите што се наоѓаат лево, односно операциите се извршуваат по редот како што се запишани, одлево-надесно.
3. Во бројни изрази без загради, во кои се јавуваат операции од различни редови, се прави договор, предност да имаат операциите со повисок ред, а операциите од ист ред се извршуваат по редот како што се напишани.
4. Во бројни изрази со загради, прво се пресметува вредноста на изразот во заградата според 2 или 3, а потоа во добиениот израз без загради повторно се применува 2 или 3.

Накратко, редоследот на извршување на операциите во броен израз е:

1. Загради
2. Степенување
3. Множење, делење (одлево-надесно)
4. Собирање, одземање (одлево-надесно)

Пример 3

Пресметај: а) $(-24) - [48 : (-6)]$, б) $[(-24) - 48] : (-6)$ и в) $(-24) - 48 : (-6)$. Објасни што ќе користиш при пресметување.

Решение:

а) $(-24) - [48 : (-6)] =$ Се пресметува во заградата, останатиот дел од изразот се препишува
 $= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16$

б) $[(-24) - 48] : (-6) =$ Се пресметува во заградата, останатиот дел од изразот се препишува $= (-72) : (-6) = 12$

в) $(-24) - 48 : (-6) =$ Предност на операцијата од повисок ред, останатиот дел од изразот се препишува $= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16$

Што мислиш, зошто бројните изрази $(-24) - [48 : (-6)]$, $(-24) - 48 : (-6)$ имаат иста бројна вредност? Дали заградите во првиот израз може да се изостават и зошто?

Задача 2

Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $(+23) + (-48) - (-79)$

б) $7 \cdot (-21) + 52 : (-13)$

в) $(-60) \cdot (-5) : 6 \cdot (-9)$

г) $294 : [(-18) - (-15)] + (-47) \cdot 2$

д) $5 \cdot (-21) - [(-21) - (60 - 12) : (-8)]$

е) $18 - 34 + 27 - 52 + 18 - 13$

Пример 4

Пресметај: а) $(-15) + (-7)$ б) $(-15) - (-7)$ в) $-(-15) + (-7)$ г) $+(-15) - (+7)$

Решение:

а) $(-15) + (-7) = -15 - 7 = -22$

б) $(-15) - (-7) = -15 + 7 = -8$

в) $-(-15) + (-7) = +15 - 7 = +8$

г) $+(-15) - (+7) = -15 - 7 = -22$

Пред пресметување бројните изрази се запишани без загради. Што можеш да забележиш?

$-(-a) = +a$ спротивен на бројот $-a$ е бројот $+a$

$-(+b) = -b$ спротивен на бројот $+b$ е бројот $-b$

Пример 5

Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $(-14) + (-28) + (+40)$

б) $125 - (-49) - (+25)$

Решение:

а) $(-14) + (-28) + (+40) = -14 - 28 + 40 = -42 + 40 = -2$

б) $125 - (-49) - (+25) = 125 + 49 - 25 = 174 - 25 = 149$

Ако пред заграда во еден израз стои знакот $+$, тогаш тој знак и заградата пред која стои се испуштаат (се бришат), а сè друго останува исто.

Ако пред заграда на еден израз стои знакот $-$, тогаш тој знак и заградата се бришат, а знаците пред броевите во таа заграда се менуваат во спротивните (од $+$ во $-$ и од $-$ во $+$).

Задача 3

Збирот на броевите (-62) и $(+130)$ помножи го со нивната разлика.

Пример 5

Одреди ја вредноста на следниот броен израз: $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$.

Решение:

Во дадениот израз $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$ прво ги пресметуваме апсолутните вредности: $|-8| = 8$ и $|-5| = 5$. Потоа заменуваме во изразот $8 + 3 \cdot 5 - 12$. Во изразот прво ја извршуваме операцијата множење како операција од повисок ред и се добива изразот $8 + 15 - 12$. Потоа ги извршуваме операциите одлево-надесно: $23 - 12 = 11$, односно $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12 = 8 + 3 \cdot 5 - 12 = 8 + 15 - 12 = 23 - 12 = 11$.

Задача 4

Пресметај ја вредноста на изразот $|9 - 11| \cdot 16 - (46 - 2 \cdot (-13)) - |-123|$.

Пример 6

Разликата од најголемиот двоцифрен цел негативен број и најмалиот цел двоцифрен позитивен број помножи ја со најмалиот цел трицифрен негативен број.

Решение:

Прво запиши ги броевите според дадениот услов за секој број. Најголемиот двоцифрен цел негативен број е -10 , најмалиот двоцифрен цел позитивен број е 10 и најмалиот цел трицифрен негативен број е -999 .

Потоа го запишуваш и го пресметуваш изразот:

$$((-10) - (+10)) \cdot (-999) = (-10 - 10) \cdot (-999) = (-20) \cdot (-999) = 19980.$$

Задача 5

Разликата од броевите 200 и -426 намали ја за количникот од броевите -360 и -12 .

Задача 6

Бојан играл 7 пати иста игра и освоил $+13, -8, -16, +10, +4, +18$ и -7 бода. Пресметај по колку бода просечно освоил Бојан за една игра.

Задача 7

Дејан работи како инженер на висока зграда чии катови се означени со броеви од -3 до 18 . Тој треба да ја набљудува работата на сите катови и да се движи со лифтот повеќе пати, нагоре и надолу. Почнувајќи од 11 . кат, тој се симнува 3 пати по 4 ката надолу, а потоа се качува 2 пати по 5 ката нагоре. На кој кат е сега Дејан?

Задача 8

Весна на својата картичка има заостанати сметки за мобилен телефон за месеците јануари, февруари и март од по 963 денари кои треба да ги плати, но по плаќањето добива 7800 денари на картичката за извршена обврска. Запиши го изразот за пресметување на состојбата на картичката на Весна со цели броеви и пресметај го.

Задача 9

Штедилница прави завршна сметка на крај од годината. Таа им должи на 45 клиенти по $12\,300$ денари, а од 62 побарува $10\,450$ денари и од 213 клиенти побарува по 3500 денари. Каков е резултатот од завршната сметка, дали штедилницата ја завршува годината со добивка?

Ако во броен израз имаме комбинација од апсолутни вредности и операции како собирање, одземање, множење и делење, како треба да ги применуваме правилата за редослед на операциите за да добиеме точен резултат? Дали постојат ситуации кога примената на апсолутна вредност може да ја промени бројната вредност на изразот и како тоа влијае врз конечниот резултат?

Во твојата тетратка одговори на следните прашања:

1. Што научив денес? (Краток опис на основниот концепт што го разбра).
2. Што беше најтешко за мене? (Препознавање на проблемите или концептите кои беа потешки).
3. Како ќе ги применам овие информации во иднина? (Како го гледаш практичното користење на наученото).

Оцени се себеси по скалата:

- 5 – Одлично, целосно разбираам и можам да применам што научив.
- 4 – Добро, но имам потреба од малку повторување за да бидам сигурен.
- 3 – Разбрав дел од материјалот, но морам да се потрудам повеќе.
- 2 – Има уште многу работи што не ги разбираам.
- 1 – Не разбираам ништо од она што беше објаснето.

На крајот може да направиш кратко споделување со наставникот или со соученик дали имаш прашања или што ти било најкорисно од лекцијата.

Самостојна работа

- Најди ја вредноста на бројните изрази:
а) $(-21) + (-1) \cdot (+42) - (+24) : (-8)$ б) $(-32) : (+8) - (+12) + (-21) : (+3)$
- Пресметај ја вредноста на изразот, претходно ослободи се од заградите.
а) $(-18) : (+3) - (-5) + (-17) \cdot (+2)$ б) $-3 - (2 + 4 - 9 - 1)$
- Изразот запиши го со помош на загради така што нема да се промени неговата вредност.
а) $-15 \cdot 3 - 48 + 2 \cdot 30 - 0:11$
б) $-57 - 18 : 3 + 2 \cdot 17 - 6$
- Пресметај ја разликата меѓу производот на броевите -10 и 9 и количникот на броевите -99 и -33 .
- Пресметај:
а) $-12 : 6 - 5 \cdot [14 - (2 - 5)]$ б) $(4 - 9) \cdot 3 - 28 : [-13 - 2 \cdot (-3)]$
- Пресметај $(3a + b) : c$ ако $a = -13$, $b = -69$, $c = -6$.
- Најди ја бројната вредност на изразите:
а) $(+1) : (-1) + (-2) : (-1) + (+3) : (-1)$ б) $(2 - 18) : [(-2) : 1]$

Степен со показател природен број

Во секојдневниот живот често се среќаваме со големи броеви, особено во математиката, природните науки и технологијата. Наместо да ги запишуваме како броеви со голем број цифри, користиме пократки записи со користење на операцијата степенување. Во оваа лекција ќе научиш: што значи степенување и како се користи; што претставуваат основата, показателот и вредноста на степен и како да пресметаш вредност на степен кога показателот е природен број. Ова знаење е основа за подоцнежни математички концепти како што се множители, квадратни и кубни броеви.





Пример 1

Ана сака да изгради ограда за својот цветен двор. Таа одлучила да користи дрвени столбови, поставувајќи по 3 столба во секој ред, а редовите да се повторуваат 7 пати.

- Запиши колку вкупно столбови ќе искористи Ана како збир на исти собираоци.
- Запиши го изразот како множење.

Решение:

- Бидејќи во секој ред има 3 столба, а секој ред се повторува 7 пати, можеме да го запишеме вкупниот број на столбови како збир на исти собираоци: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.
- Истата пресметка можеме да ја претставиме како множење: $7 \cdot 3 = 21$.
Ако Ана направи иста ограда за 5 такви цветни дворови, колку столбови ќе ѝ бидат потребни?

Задача 1

Во библиотеката имало 12 полица и на секоја полица имало по 50 книги. Во текот на една недела 15 ученици зеле по 2 книги. Колку книги има во библиотеката откако учениците ги зеле книгите што им требале?

Пример 2

Научниците проучуваат нов вид бактерии кои се делат на две на секои 15 минути. Истражувањето започнува со една единствена бактерија.

- Запиши со множење колку бактерии ќе има по 1 час.
- Претстави го бројот на бактерии по 1 час како степен.
- Ако оваа поделба продолжи непроменета 3 часа, запиши го конечниот број на бактерии со степен и пресметај ја неговата вредност.



Решение:

- Бидејќи бактеријата се удвојува на секои 15 минути, во 1 час (60 минути) ќе се случат 4 поделби: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Значи, по 1 час ќе има 16 бактерии.



- б) Пократко множењето на 4 двојки можеме да го запишеме како степен: $2^4 = 16$.
- в) Ако процесот продолжи 3 часа, тогаш во тие 3 часа ќе се случат вкупно: $3 \cdot 4 = 12$ поделби.
Вкупниот број на бактерии ќе биде: 2^{12} .
Пресметувајќи ја вредноста: $2^{12} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4096$. Значи, по 3 часа бројот на бактерии ќе биде 4096.

Множењето на еден ист број самиот со себе n -пати, се вика степен и се запишува $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-ПАТИ}} = a^n$.

Бројот a^n каде што $n \in \mathbb{N}_0$ се вика степен со основа a и степенев показател (експонент) n .

Со пресметување на $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ се добива вредноста на степенот a^n . Постапката за пресметување на вредноста на степенот се вика степенување. По договор, за секој број a , $a^0 = 1$ и операцијата степенување има предност пред операцијата множење, така наместо $m \cdot (a^n)$ пишуваме $m \cdot a^n$.

Во примерот 2 под б, $2^4 = 16$, бројот 2 е основа на степенот, 4 е степенев показател и 16 е вредност на степенот.

Запиши ги основата, степеновиот показател и вредноста на степенот под в.

Задача 2

Марко и Петар учествуваат во математички натпревар каде што треба да создадат сопствен систем на мерење должина користејќи степенување. Тие одлучуваат дека основната единица на должина ќе биде 1 чекор, а секое следно зголемување на растојанието ќе биде три пати поголемо од претходното.

- Запиши го растојанието по секој нареден чекор за првите пет нивоа користејќи множење.
- Претстави го истото растојание користејќи ги степените на бројот 3.
- Ако осмото ниво претставува вкупно поминато растојание, изрази го ова растојание со степен и пресметај ја неговата вредност.

Задача 3

Запиши ги првите 10 степени на бројот 10 со експонент природен број и пресметај ги нивните вредности. Што забележуваш?

Пример 3

Марко одлучува да посади 3 цвеќиња првата недела, а секоја следна недела да го удвои бројот на новопосадени цвеќиња во однос на претходната недела.

- Запиши колку нови цвеќиња ќе посади Марко во текот на првите 6 недели со множење.
- Претстави го бројот на новопосадени цвеќиња секоја недела користејќи степен.
- Пресметај колку вкупно цвеќиња ќе посади Марко по 6 недели.

Решение:

- Бидејќи Марко го удвојува бројот на цвеќиња секоја недела, добиваме:
 $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
 Бројот на цвеќиња по недели е: 3, 6, 12, 24, 48, 96.
- Истото можеме да го запишеме со степенување: $3, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4, 3 \cdot 2^5$.
- За да го пресметаме вкупниот број на посадени цвеќиња по 6 недели, го собираме бројот на цвеќиња од секоја недела и имаме:
 $3 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$
 Значи, по 6 недели Марко ќе има посадено вкупно 189 цвеќиња.

Задача 4

Емилија работи во мала фабрика која произведува и пакува кутии. Таа започнува со 5 пакувања кутии на првиот ден, а секој следен ден прави тројно повеќе пакувања отколку претходниот ден.

- Запиши колку пакувања на кутии ќе направи Емилија во текот на првите 4 дена со множење.
- Претстави го бројот на направени пакувања на секој ден користејќи степен.
- Пресметај вкупно колку пакувања на кутии ќе направи Емилија по 4 дена.

Како би ја опишал разликата помеѓу степените со различни основи и исти показатели (на пример, 2^3 и 3^3) и какви се нивните вредности? Што би се случило ако основата остане иста, а се менува само показателот? Прикажи ја постапката на пресметување и објасни како степените со исти основи, а со различни показатели влијаат врз вредноста на степенот.

Оцени го твоето знаење.

- Дали можам да објаснам што е степен и кои се неговите компоненти (основа и показател)?
 1 = Не можам да објаснам
 2 = Можам да објаснам со помош на наставникот
 3 = Можам да објаснам самостојно

2. Дали можам правилно да запишам степен со природен показател за различни основи?
 - 1 = Не можам да запишам степен
 - 2 = Можам да запишам степен, но понекогаш правам грешки
 - 3 = Можам да запишам степен точно и брзо
3. Дали можам да пресметам вредност на степен со показател природен број?
 - 1 = Не можам да пресметам
 - 2 = Можам да пресметам со помош
 - 3 = Можам да пресметам самостојно и точно
4. Дали можам да ги применим степените во контексти од секојдневниот живот, на пример, при раст на популации и слично?
 - 1 = Не можам да поврзам степен со секојдневен контекст
 - 2 = Можам со помош на примери
 - 3 = Можам самостојно да применим степен во различни ситуации
5. Дали разбираам како степените со големи показатели растат многу брзо и зошто тоа е важно во математиката?
 - 1 = Не разбираам
 - 2 = Разбирам делумно
 - 3 = Разбирам целосно и можам да објаснам

Ако повеќето одговори ти се под 3, тоа значи дека успешно ги постигна сите стандарди со лекцијата.

Ако имаш повеќе одговори под 2, може да ти треба повторување на некои делови од лекцијата.

Ако повеќе си одговорил под 1, посветувај се со наставникот за дополнителна помош и вежби.

Самостојна работа

1. Запиши ги како степен производите:
 - а) $7 \cdot 7 \cdot 7$
 - б) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
 - в) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
2. Претстави ги како производ степените:
 - а) 5^4
 - б) $(-3)^5$
 - в) $(x + y)^3$
3. Пресметај ја вредноста на степените:
 - а) 5^4
 - б) $(-10)^5$
 - в) 3^4
4. Пресметај ја вредноста на изразите:
 - а) $2^3 - 3^3$
 - б) $5^3 \cdot (-3)^4 + 2^2 - (-7)^2$
 - в) $2^4 \cdot 3^2 + 5^2 : 5^2$

5.* Провери што е точно:

- а) $(-2)^{11} < 0$ б) $(-2)^{22} > 0$ в) $-2^{22} > 0$ г) $(-5)^3 \cdot (-7)^3 > 0$
д) $a^3 \cdot b^3 > 0$, за $a > 0, b > 0$ е) $a^3 \cdot b^3 < 0$, за $a < 0, b < 0$

6. За кои природни броеви n важи:

- а) $1^n = 1$ б) $0^n = 0$ в) $2^n > 0$ г) $(-3)^n > 0$ д) $(-5)^n < 0$

7. За која вредност на n е точно:

- а) $2^n = 16$ б) $(-3)^n = -27$

8. Еден УСБ-уред има капацитет од 2^4 гигабајти. Колку гигабајти има уредот?

9. Бактеријата се удвојува секој час. Ако на почетокот има 3 бактерии, колку бактерии ќе има по 5 часа?

- а) Запиши го со користење степени бројниот израз за добивање на бројот на бактерии по 5 часа.
б) Запиши колкав ќе биде бројот на бактерии по n -часа.

Квадрати и квадратни корени до 100

Знаењето што ќе го стекнеш со обработката на оваа лекција е основа за понатамошно учење на математичките концепти и ќе ти помогне во решавањето различни задачи и проблеми. Ќе научиш како да ги препознаеш квадратите и да ги пресметаш нивните квадратни корени, како и да ги користиш овие вештини во секојдневниот живот и во понатамошното учење на математиката.



Пример 1

Таткото на Мехмед имал два магацини. Во првиот магацин имало 425 kg брашно, а во вториот имало 3 пати повеќе од првиот. Таткото продал 40 % од вкупното количество брашно од магацините. Колку вкупно брашно останало во магацините?

Решение:

Количеството брашно во вториот магацин е: $3 \cdot 425 = 1275 \text{ kg}$. Значи, во вториот магацин има 1275 kg брашно.

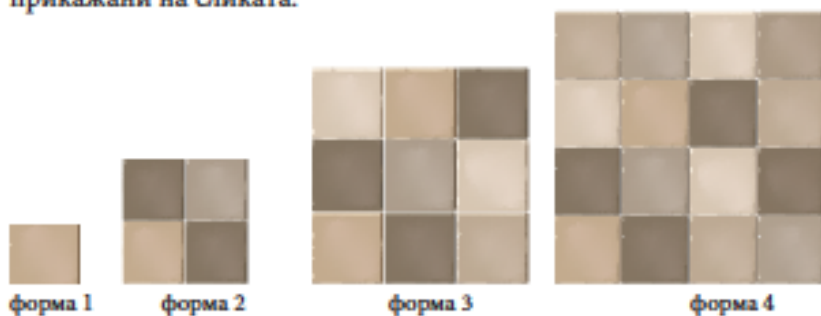
Вкупното количество брашно во двата магацини е: $425 \text{ kg} + 1275 \text{ kg} = 1700 \text{ kg}$.

Количеството брашно што било продадено (40 % од вкупното) е: 40 % од 1700 kg е: $0,4 \cdot 1700 = 680 \text{ kg}$. Таткото на Мехмед продал 680 kg брашно.

Во двата магацина по продавањето останало: $1700 \text{ kg} - 680 \text{ kg} = 1020 \text{ kg}$. Вкупно во магацините останало 1020 kg брашно.

Пример 2

Јанко реди квадратни плочки во паркот. Формите што ги добива при редувањето се прикажани на сликата.



- Запиши го вкупниот број на плочки што се искористени во секоја форма одделно.
- Запиши го бројот на употребени плочки во секоја форма како степен од број.
- Колку плочки ќе има петтата, шестата, седмата форма?

Решение:

- Во формата 1 има 1 плочка, формата 2 има 4 плочки, формата 3 има 9 плочки, формата 4 има 16 плочки.
 - Бројот на употребени плочки во секоја форма запишан како степен на број е:
 $1^2 = 1$, се чита „1 на квадрат е еднакво на 1“.
 $2^2 = 4$, се чита „2 на квадрат е еднакво на 4“.
 $3^2 = 9$, $4^2 = 16$.
 - Од редувањето на формите се забележува дека во секоја од нив бројот на редови е ист со бројот на плочки во еден ред. Така, во петтата форма ќе има $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, во шестата $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$, а во седмата $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$,...
- Броевите 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ги нарекуваме полни квадрати или квадратни броеви.

Бројот кој може да се запише како производ на два исти множители (цели броеви) се вика полн квадрат или квадратен број.

Задача 1

Запиши ги сите полни квадрати од 1 до 100.

Задача 2

- а) Колку изнесува деветтиот полн квадрат? б) Дали 68 е полн квадрат од некој број?

Пример 3

Даден е квадратниот број 64. Кој број на квадрат е 64?

Решение:

За да одговориме на прашањето, треба да најдеме кој број помножен сам со себе ќе го даде производот 64. Постојат два такви броја $+8$ и -8 , бидејќи $8^2 = 64$ и $(-8)^2 = 64$.

Засега ќе се задржиме само на позитивните (природни) броеви и нивните квадрати.

Ќе запишеме $\sqrt{64} = 8$ (се чита „квадратен корен од бројот 64 е еднакво на 8“).

Слично како пример 3 исто така $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$,

Бројот b се вика квадратен корен од бројот a ако $b^2 = a$ (пишуваме $b = \sqrt{a}$).

Задача 3

Запиши ги квадратните корени на броевите: 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100.

Задача 4

Запиши ги следните броеви како збир на два квадратни броја.

- а) 13 б) 29 в) 45

Пример 4

Марко има двор во форма на квадрат со плоштина од 49 квадратни метри. Колкава е страната на дворот?

Решение:

Всушност, барањето на задачата е да се определи квадратен корен на бројот 49.

Бидејќи $7 \cdot 7 = 49$, се добива дека должината на страната на дворот на Марко е 7 m.

Задача 5

Три соби од станот на семејството Јанковски имаат форма на квадрат со плоштина: 25 m^2 , 36 m^2 и 16 m^2 . Колку е периметарот на секоја соба?

Миле вели дека полн квадрат никогаш не завршува на 3. Дали е во право? Објасни.

Во твојата тетратка запиши го одговорот на прашањата:

1. Мојам ли да препознам квадратни броеви до 100? (Да/Не)
2. Мојам ли да најдам квадратен корен на квадратен број? (Да/Не)
3. Мојам ли да го применим концептот на квадратни броеви во реални примери (на пример, пресметување плоштина на квадратни објекти)? (Да/Не)

Самостојна работа

1. Пресметај:
а) $\sqrt{225}$ б) $\sqrt{625}$ в) $\sqrt{400}$
2. Ако $x^2 = 81$, тогаш кои се можните вредности на x ?
3. Јован сака да огради градина во форма на квадрат со плоштина од 144 m^2 . Колку е должината на страната на градината? Пресметај колку метри жица ќе му требаат на Јован за да ја огради градината?
4. Ако градина во форма на квадрат има страна 11 m , колку е нејзината плоштина?
- 5.* Формулата за пресметување на растојанието на одекнување на звукот е $d = \sqrt{t}$, каде што d е растојанието во метри, а t е времето во секунди. Ако ехото се врати за 9 секунди, колку е растојанието до препреката?
6. Марија сака да купи тепих што ќе го покрие целиот под во квадратна просторија. Таа знае дека просторијата има плоштина од 81 квадратен метар. Таа сака да знае колку метри должина треба да има тепихот за да го покрие целиот под.
7. Работник во магацин треба да подреди 225 еднакви кутии во форма на квадрат (ист број кутии по ред и по колони).
Во колку редови и колони се подредени кутиите?
8. Во училиштето учениците засадиле 256 украсни цвеќиња, така што формираат квадрат, со еднакво растојание и број на редови и колони.
Колку цвеќиња има во секој ред?

Споредување дробки

Како начин за претставување делови од целина се користат дробки. Во секојдневниот живот често треба да споредуваш дробки, на пример, кога споредуваш кој изел поголем дел од пицата или кој поминал поголем дел од патот.

За да можеш правилно да споредуваш дробки, треба да разбереш што да направиш за полесно да ги споредуваш. Во оваа лекција ќе се потсетиш на некои од начините за споредување и подредување дробки што ги учеше во шесто одделение:

- Сведување на ист именител,
- Сведување на ист броител,
- Користење дијаграми – визуелно споредување на големината на дробките.

Исто така, ќе научиш да споредуваш дробки со претходно претворање во децимални броеви. Со користење на една од овие стратегии ќе можеш точно да одредиш која дробка е поголема или помала и да ги подредуваш по големина.



Пример 1

Јасмина многу сака чоколада. Како треба да одбира во секоја од задачите под а, б и в за да го земе поголемото парче?

- а) Едното парче е $\frac{6}{10}$ од чоколадото, а другото е $\frac{7}{10}$ од чоколадото.
б) Едното парче е $\frac{5}{8}$ од чоколадото, а другото е $\frac{5}{16}$ од чоколадото.
в) Едното парче е $\frac{3}{7}$ од чоколадото, а другото е $\frac{7}{10}$ од чоколадото.

Решение:

- а) Чоколадото е поделено на еднакви делови, но поголемо е парчето чоколадо кое има повеќе делови, односно парчето чоколадо со седум дела. Значи Јасмина ќе го избере парчето што е $\frac{7}{10}$ од чоколадото бидејќи $\frac{7}{10} > \frac{6}{10}$.
- б) Со дробките $\frac{5}{8}$ и $\frac{5}{16}$ се добива ист број на делови, но различни по големина. Поголеми се оние што се добиени со делење на чоколадото на помал број парчиња. Јасмина ќе го избере парчето што е $\frac{5}{8}$ од чоколадото. Значи $\frac{5}{8} > \frac{5}{16}$. Потсетување: Од две дробки со исти броители поголема дробка е таа што има помал именител.
- в) Како ќе ги споредиш дробките? Седминките се поголеми, но има повеќе десеттинки. Споредбата ќе ја направиме со користење на постапката за проширување на дробки до заеднички именител.

Така добиваме: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{30}{70}$ и $\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 7}{10 \cdot 7} = \frac{49}{70}$. $\frac{49}{70} > \frac{30}{70}$, односно $\frac{7}{10} > \frac{3}{7}$.

Пример 2

Спореди со помош на знаците $<$, $=$, $>$:

- а) $\frac{2}{3}$ и 1 б) $\frac{7}{4}$ и 1 в) $\frac{5}{3}$ и 1

Решение:

- а) $\frac{2}{3}$ е права дробка и значи две третини од една целина, а 1 означува една целина која има три третини. Затоа $\frac{2}{3} < \frac{3}{3}$, односно $\frac{2}{3} < 1$.
- б) Дробката $\frac{7}{4}$ е неправна дробка, па $\frac{7}{4} > 1$, бидејќи $\frac{7}{4} > \frac{4}{4}$.
- в) $\frac{5}{3} = 1$. Зошто?

Секоја права дробка е помала од 1, а секоја неправна дробка е поголема или еднаква на 1. Често наместо права дробка се користи и терминот правилна дробка, но двата термини имаат исто значење.

Задача 1

Спореди ги дробките:

- а) $\frac{1}{13}$ и $\frac{7}{11}$ б) $\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{9}$ в) $\frac{5}{14}$ и $\frac{3}{8}$ г) $\frac{4}{9}$ и $\frac{7}{9}$ д) $\frac{17}{24}$ и $\frac{17}{19}$

Пример 3

Вања искористила $\frac{14}{20}$ од цвеќињата за да направи букети, а Мелек искористила $\frac{3}{5}$ од цвеќињата.

- а) Запиши ги дробките како децимални дробки.
 б) Запиши ги децималните дробки како децимални броеви.
 в) Која од нив искористила помалку цвеќиња за да направи букети?

Решение:

- а) $\frac{14}{20} = \frac{14 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{70}{100}$. Дробката ја прошируваме со 5. Зошто?
 Сега дробката $\frac{3}{5}$ ја прошируваме со 20. Зошто? $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$.
- б) $\frac{60}{100} = 0,60$ и $\frac{70}{100} = 0,70$.
 Објасни зошто $\frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \frac{600}{1000}$. Ако ги запишеме дробките како децимални броеви, имаме: $0,6 = 0,60 = 0,600$.
 Исто така, $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ или $0,70 = 0,7$. Добиениот број 0,70 можеме да го запишеме како 0,7. Зошто?
- в) Бидејќи $0,7 > 0,6$, значи $\frac{14}{20} > \frac{3}{5}$. Значи, Вања искористила повеќе цвеќиња од Мелек.

Оттука може да запишеме две својства на децималните броеви:

Децималниот број не се менува ако на неговата десна страна, по последната децимала се додадат нули.

Децималниот број не се менува ако од неговата десна страна по децималната запирка се изостават нулите после кои нема други ненулни цифри.

Пример 4

Коле купил $\frac{2}{5}$ kg компири и $\frac{3}{8}$ kg кромид. Што купил Коле повеќе?

Решение:

Знаеш дека дробната црта значи делење. Со делење на броителот со именителот можеш да ја запишеш дропката како децимален број.

Имаме $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$ и $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$. Сега треба да споредувањаш два децимални броја. Тоа го учеше во шесто одделение. Децималниот број 0,4 има повеќе десеттинки од децималниот број 0,375. Значи $0,4 > 0,375$, односно $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$. Коле купил повеќе компири. Кога ги знаеш својствата на децималните броеви, за да ги споредиш, може да ги запишеш со ист број на децимали, односно $0,4 = 0,400$. Имаш $0,400 > 0,375$, односно $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$.

При споредување на дропки, може претходно да ги запишеш како децимални броеви со делење на броителот со именителот, а потоа да споредувањаш децимални броеви.

Задача 2

Спореди ги дропките откако претходно ќе ги запишеш како децимални броеви:

- а) $\frac{17}{50}$ и $\frac{7}{20}$ б) $\frac{103}{1000}$ и $\frac{1}{8}$ в) $\frac{4}{125}$ и $\frac{8}{25}$ г) $\frac{19}{8}$ и $2\frac{2}{5}$

Пример 5

На училишниот спортски натпревар четири ученици учествувале во трка и истрчале различни делови од патеката пред да застанат да одморат. Должината на патеката е иста за сите, а резултатите се: Јана истрчала $\frac{3}{5}$ од патеката, Марко истрчал $\frac{1}{8}$ од патеката, Ивана истрчала $\frac{3}{4}$ од патеката и Петар истрчал $\frac{5}{10}$ од патеката.

- а) Кој ученик истрчал најголем дел од патеката?
б) Кој ученик истрчал најмал дел од патеката?
в) Подреди ги резултатите на учениците од оној што истрчал најмалку до оној што истрчал најмногу.

Решение:

Дропките ги запишуваме како децимални броеви:

$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6$ = Со користење на првото својство = 0,600

$$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125 \quad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 = 0,750 \quad \frac{5}{10} = 5 : 10 = 0,5 = 0,500$$

Сега ги споредуваме добиените децимални броеви, при што се добива $0,125 < 0,5 < 0,6 < 0,75$.

а) Ивана истрчала најголем дел од патеката.

б) Марко истрчал најмал дел од патеката.

в) $\frac{1}{8} < \frac{5}{10} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$

Задача 3

Еден мајстор може да изврши една работа за 8 часа, а друг може да ја изврши за 5 часа. Колкав дел од работата може да изврши секој од нив за 1 час? Кој од нив може да изврши повеќе работа за 6 часа?

Задача 4

Подреди ги $\frac{39}{50}$; 0,45 ; $\frac{1}{2}$; 1,67; 0,005; $\frac{18}{25}$; $\frac{4}{5}$ почнувајќи од најмалиот.

Зошто е важно да знаеме како да споредуваме и да подредуваме дропки во секојдневниот живот? Дали можеш да наведеш пример од реалноста каде што ова знаење би ти било корисно?

Одговори во тетратката на следните прашања за да ја процениш својата работа.

1. Колку добро разбирам што е дробка и како да ја споредим со друга дробка?
2. Дали ми е јасно како да ги подредим дробките?
3. Дали успеав да применим стратегии за споредување дробки во практични лекции?
(напиши кратко)

Користи скала од 1 до 5, каде што:

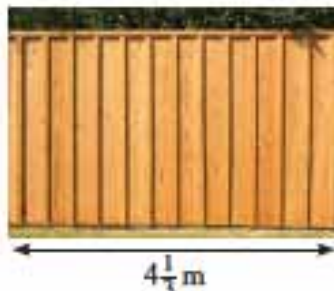
- 1 – Не разбрав ништо.
- 2 – Разбрав нешто, но имам многу прашања.
- 3 – Разбрав дел од лекцијата, но има нешто што ми е нејасно.
- 4 – Разбрав добро, но треба да вежбаам повеќе.
- 5 – Целосно ја разбираам лекцијата и можам да ја применим.

Самостојна работа

- Спореди ги дробките: а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ б) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{7}$ в) $\frac{4}{9}$ и $\frac{8}{9}$ г) $\frac{12}{17}$ и $\frac{13}{17}$ д) $\frac{36}{47}$ и $\frac{21}{47}$
- Спореди ги дробките: а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{7}$ б) $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{6}$ в) $\frac{10}{10}$ и $\frac{10}{20}$ г) $\frac{41}{38}$ и $\frac{41}{38}$ д) $\frac{258}{300}$ и $\frac{258}{100}$
- Сведи ги дробките на најмал заеднички именител:
а) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$ б) $\frac{7}{12}$ и $\frac{13}{15}$ в) $\frac{11}{15}$ и $\frac{31}{35}$ г) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{15}$ и $\frac{1}{20}$ д) $\frac{11}{18}$, $\frac{31}{72}$, $\frac{5}{9}$ и $\frac{29}{36}$
- Подреди ги дробките по големина, почнувајќи од најмалата, одвоени со знакот <:
а) $\frac{12}{18}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{7}{18}$ и $\frac{10}{18}$
б) $\frac{13}{15}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{13}{28}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{13}{128}$, $\frac{13}{12}$ и $\frac{13}{44}$
в) $\frac{8}{140}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{58}{60}$ и $\frac{253}{420}$
- Еден работник го завршил покривот за $\frac{1}{2}$ од денот, а утредента направил уште еден покрив на кој потрошил $\frac{3}{8}$ од денот. Кој покрив го правел подолго?
- Молер бојадисувал еден сид 3 дена. Првиот ден завршил $\frac{1}{5}$ од сидот, вториот ден $\frac{4}{12}$ од сидот и третиот ден $\frac{14}{30}$ од сидот. Кој ден молерот завршил најмал дел од сидот, а кој ден најголем?
- Еден кројач може да искрои парче облека за 5 часа, а друг за 7 часа. Кој скроил повеќе од материјалот, ако првиот кројач работел 4 часа, а вториот еден час повеќе?
- Три момчиња имаат еднаква сума пари. Првото момче потрошило $\frac{4}{5}$ од сумата, второто $\frac{13}{15}$, а третото момче потрошило $\frac{17}{21}$ од парите. Кој од нив потрошил најмногу, а кој најмалку пари?
- Еден резервоар за вода се полни од две цевки. Првата цевка може да го наполни резервоарот за 8 часа, додека на другата ѝ се потребни 11 часа за да го наполни. Ако првата цевка е отворена 3 часа, втората 4 часа, која од нив ќе наполни поголем дел од резервоарот?
- Заради штедење вода, Небојша собира дождовница во буриња така што секое има капацитет од 1 килолитар. Притоа, во првото буре наполнил 0,34 kl, во второто буре $\frac{4}{5}$ од бурето, во третото буре $\frac{1}{8}$ и во четвртото буре 0,6 kl. Во кое буре има најмногу, а во кое најмалку дождовница?

Периодични децимални броеви

Во секојдневниот живот често доаѓаме во ситуација кога треба да ги претвориме децималните броеви во дропка или обратно. На пример, колку сантиметри е долго парчето ограда за дворот ако во метри е изразено како $4\frac{1}{3}$ m. Кога би го претвориле овој мешан број во децимален, би добиле број кој содржи 4 цели и 3 како децимала која цело време се повторува, а делењето не завршува. За разлика од $4\frac{1}{3}$, бројот $4\frac{3}{5}$ претворен во децимален е 4,6, односно има конечен број децимали.



Во оваа лекција ќе научиш како да ги запишуваш и именуваш децималните броеви без разлика на бројот на децимални места што ги имаат, а се добиени при делење на кои било два броја. Со овие знаења ќе ја подобриш твојата способност за работа со децимални броеви и ќе можеш лесно да ги решаваеш проблемите со нив.

Пример 1

- Кој број е поголем: 3,45 или 3,54?
- Кој број е помал: 6,27 или 6,72?
- Кој број е најголем: 2,85, 2,58 или 2,95?
- Подреди ги броевите од најмал до најголем: 4,6; 4,16; 4,61.

Решение:

- $3,54 > 3,45$
 - $6,27 < 6,72$
 - Најголем е бројот 2,95
 - $4,16 < 4,6 < 4,61$
- Објасни го одговорот на секое прашање.

Задача 1

Бројот 18,356248 заокружи го:

- на една децимала
- на две децимали
- на четири децимали

Пример 2

Во четири кутии има различна количина портокали: $\frac{3}{8}$ kg, $\frac{7}{9}$ kg, $\frac{40}{27}$ kg, $\frac{7}{12}$ kg.

- Запиши го секое количество на портокали како децимален број.
- Објасни што забележуваш.

Решение:

$$\begin{array}{r}
 \text{а) } 3 : 8 = 0,375 \\
 \begin{array}{r}
 30 \\
 -24 \\
 \hline
 60 \\
 -56 \\
 \hline
 40 \\
 -40 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 : 9 = 0,77777... \\
 \begin{array}{r}
 70 \\
 -63 \\
 \hline
 70 \\
 -63 \\
 \hline
 70 \\
 -63 \\
 \hline
 70 \\
 -63 \\
 \hline
 70 \\
 -63 \\
 \hline
 7
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 40 : 27 = 1,481481... \\
 \begin{array}{r}
 -27 \\
 \hline
 130 \\
 -108 \\
 \hline
 220 \\
 -216 \\
 \hline
 40 \\
 -27 \\
 \hline
 130 \\
 -108 \\
 \hline
 220 \\
 -216 \\
 \hline
 40 \\
 -27 \\
 \hline
 13
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 : 12 = 0,58333... \\
 \begin{array}{r}
 70 \\
 -60 \\
 \hline
 100 \\
 -96 \\
 \hline
 40 \\
 -36 \\
 \hline
 40 \\
 -36 \\
 \hline
 40 \\
 -36 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \end{array}$$

При делење на 3 и 8 за дропката $\frac{3}{8}$, делењето завршува, односно се добива остаток 0. Добиениот број е децимален број кој уште се вика **конечен децимален број**. Во секоја од другите дропки при делење на броителот и именителот делењето не завршува. Без разлика колку многу нули да допишуваме, не се добива остаток 0, односно делењето продолжува до бесконечност. Добиените децимални броеви имаат бесконечно многу децимали и затоа ги викаме **бесконечни децимални броеви**.

Бесконечните децимални броеви 0,7777... и 1,481481... имаат една цифра (7) или група на цифри (481) кои се повторуваат по ист редослед непосредно по децималната запирка. Ваквите децимални броеви се викаат **чисто периодични децимални броеви**. Низата од цифрите што се повторува во децималниот број се вика период.

Кај бесконечниот децимален број 0,58333... добиен при делење на 7 и 12, повторувањето на цифра или група на цифри по ист редослед не започнува веднаш по децималната запирка. Ваквите децимални броеви се викаат **мешано периодични децимални броеви**.

	Чисто периодични децимални броеви		Мешано периодични децимални броеви
број	0,777...	0,481481...	0,58333...
Се чита	0 цели и 7 во период	0 цели и 481 во период	0 цели, 58 стотинки и 3 во период
Се запишува	0,(7)	0,(481)	0,58(3)

Во бројот 0,58(3) групата цифри 58 што се наоѓа пред цифрата 3 (период) се вика **претпериод**.

Со воведување на децималните броеви (конечни и бесконечни) можеме секој природен број да го поделиме со секој природен број, при што како резултат на тоа делење се добива конечен или периодичен децимален број.

При делење на два броја може да се добие:

- 1) Конечен децимален број.
- 2) Бесконечен децимален број, и тоа:
 - а) чисто периодичен децимален број (кога веднаш по децималната запирка се повторува една цифра или група од цифри),
 - б) мешано периодичен децимален број (кога повторувањето на цифра или група од цифри не започнува веднаш по децималната запирка).

Задача 2

Запиши ги како децимални броеви дробките и определи од кој вид е добиениот децимален број:

- а) $\frac{37}{25}$ б) $\frac{12}{27}$ в) $\frac{625}{135}$ г) $\frac{152}{41}$ д) $\frac{20250}{1296}$ е) $\frac{19}{9}$

Пример 3

Ана и Марко сакаат да направат колачи. Според рецептот, потребни им се $\frac{2}{3}$ литри млеко, $\frac{3}{4}$ килограми брашно и $\frac{5}{6}$ килограми шеќер.

- а) Претвори ги дадените дробки во децимални броеви.
- б) За секој добиен децимален број, објасни дали е конечен или бесконечен децимален број.
- в) Ако мерната чаша што ја користат има ознаки на секои 0,1 литар, на колку литри ќе го заокружат бројот кој ја покажува зафатнината на млекото?
- г) Ако на вагата може да се измери маса со прецизност до 0,01 kg, на колку килограми ќе ги заокружат брашното и шеќерот?

Решение:

- а) Дробките запишани како децимални броеви се: $\frac{2}{3} = 0,4$; $\frac{3}{4} = 0,75$ и $\frac{5}{6} = 0,8333...$
- б) 0,4 е конечен децимален број бидејќи има конечен број на цифри по децималната запирка.
0,75 е конечен децимален број бидејќи има конечен број на цифри по децималната запирка.
0,8333... е мешан периодичен децимален број бидејќи цифрата 3 се повторува бесконечно многу пати, а нејзиното повторување не започнува веднаш по децималната запирка.
- в) Бидејќи мерната чаша од литар има ознаки на секои 0,1 литар, 0,4 литри можат точно да се измерат. Значи, нема потреба од заокружување на вредноста бидејќи таа веќе се вклопува во оваа скала.
- г) Брашното (0,75 kg) веќе има две децимални места, па не е потребно заокружување на стотинки, додека шеќерот (0,8333...) треба да се заокружи на две децимални места: 0,83 kg. Размисли и објасни зошто во овој случај не заокружуваме на 0,84?

Задача 3

Марија и Иван мереле должини на различни предмети за нивниот училиштен проект. Еве ги нивните мерења во метри: должината на масата е $\frac{7}{8}$ m, висината на столот е $\frac{5}{4}$ m и должината на украсна лента е $\frac{2}{3}$ m.

- Претвори ги дадените дробки во децимални броеви.
- Одреди за секој број дали е конечен или бесконечен децимален број.
- Ако Марија и Иван користат лента за мерење со ознаки на секои 0,05 m, на која најблиска ознака ќе ја заокружат секоја должина?

Ако поделиме 1 со 3, добиваме бесконечен периодичен децимален број (0,3333...). Ако овој резултат го помножиме со 3, ќе добиеме 0,9999....

Но, знаеме дека $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$. Како е можно да се добива и 0,999... и 1? Што мислиш, зошто ова се случува?

„Три прашања за размислување“ во твојата тетратка:

- Што научив денес за конечни и бесконечни децимални броеви? (Напиши една-две реченици.)
- Која задача ми беше најлесна, а која најтешка? Зошто? (Ги идентификуваш предизвиците.)
- Колку добро се чувствувам во врска со оваа лекција?
(Одлично | Добро | Треба да вежбаам повеќе.)

Самостојна работа

1. Подели:

а) $2 : 3$ б) $5 : 9$ в) $2 : 11$ г) $14 : 22$ д) $16 : 27$ е) $50 : 37$ ж) $73 : 41$

Дали добиените броеви се чисто периодични или мешано периодични?

Одреди го периодот на секој од броевите.

2. Претвори ги дробките во децимални броеви и за секој од нив одреди ги периодот и претпериодот доколку ги има.

а) $\frac{38}{9}$ б) $\frac{13}{15}$ в) $\frac{32}{28}$ г) $\frac{42}{36}$ д) $\frac{118}{123}$ е) $\frac{23}{37}$

3. Дадените броеви заокружи ги на една децимала:

а) 0,147 б) 5,6(3) в) 14,009 г) 1,91556 д) 3,(5) е) 0,901 ж) 26,863 з) 26,98

4. Дадените броеви заокружи ги на две децимали:

а) 6,06132 б) 0,009995 в) 153,0(5) г) 12,561999 д) 0,(9) е) 77,(7)
ж) 9,0(173) з) 9,99(8)

Опишување, пресметување и споредување делови од целината со дробки и проценти

Дропките и процентите се важен дел од секојдневниот живот – ќе ги користиш кога пресметуваш попусти во продавница, кога споредуваш резултати, анализираш нутритивен состав на храна или одредуваш колкав дел од нешто е искористен. Во оваа лекција ќе научиш како да користиш дробки и проценти за да опишеш делови од форми, целини и мерки.



Ќе истражуваш како да пресметаш едноставни проценти од дадена целина и како да изразиш дел од нешто како дробка или процент. Исто така, ќе користиш проценти за да споредуваш различни количини и да го разбереш нивното значење во реални ситуации. Овие знаења ќе ти помогнат подобро да ги разбираш математичките односи околу себе и да носиш подобри одлуки во секојдневниот живот.

Пример 1

Дадени се две различни ситуации во кои треба да користиш дробки, децимални броеви и проценти:

Ситуација 1: Направена е анкета за омилено овошје кај 1100 ученици и биле добиени следните резултати: 12 % од учениците избрале јаболка, 14 % избрале банани, 15 % избрале портокали, 110 ученици не избрале овошје, а останатите избрале друго овошје како омилено.

Ситуација 2: Паркот е поплочен со 141000 плочки. Во паркот, 1410 од плочките се во делот за игралиште.

- Претвори ги дадените проценти 12 %, 14 % и 15 % во дробки.
- Одреди колкав процент од вкупниот број (1100) го претставуваат 110-те ученици што не избрале овошје. Запиши го резултатот како процент и како дробка.
- Одреди колкав дел од паркот е зафатен од игралиштето, изразено како процент и како дробка.

Решение:

а) $12\% = \frac{12}{100} = \frac{12 \cdot 4}{100 \cdot 4} = \frac{3}{25}$, $14\% = \frac{14}{100} = \frac{14 \cdot 2}{100 \cdot 2} = \frac{7}{50}$, $15\% = \frac{15}{100} = \frac{15 \cdot 5}{100 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

б) Делот од ученици што не избрале овошје прикажан како дробка е $\frac{110}{1100}$. Дробката може да се скрати ако и броителот и именителот се поделат со 110 и се добива $\frac{110 \cdot 110}{1100 \cdot 110} = \frac{1}{10}$. Дробката $\frac{1}{10}$ ако се прошири со 10 за да добиеме 100 во именител, ќе имаме $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$. Значи, 10 % од учениците не избрале овошје.

в) Упатство: Се решава како и под б).

Задача 1

Еден производ чини 900 денари. Цената на производот е намалена за 15 %. Колку чини производот по намалувањето на цената?

Пример 2

Во дворот на семејството Силјановски биле поставени 1000 светилки за декорација по повод семејна забава. 12 % од светилките биле сини, 24 % зелени и 15 % црвени. Останатиот дел од светилките биле жолти.

- а) По колку од светилките биле сини, зелени и црвени?
- б) Бројот на светилки од секоја боја запиши го како дробка.
- в) Одреди колку светилки биле жолти.

Решение:

- а) 12 % од 1000 светилки биле сини. Ако 1 % или $\frac{1}{100}$ од 1000 е 10 светилки, тогаш 12 % ќе биде $12 \cdot 10 = 120$. Значи 120 светилки биле сини.
24 % од 1000 светилки биле зелени (сини се 12 %). Тоа значи дека има двојно повеќе зелени светилки отколку сини. Ако 120 се сини, се добива $2 \cdot 120 = 240$ се зелени светилки.
Слично, 15 % од 1000 односно $15 \cdot 10 = 150$ светилки се црвени.
Можеме да постапиме и на поинаков начин: Тргувајќи од 10 % = $\frac{1}{10}$ се добива дека 10 % од 1000 светилки се $1000 : 10 = 100$, за 5 % имаме дека се половина од 10 %, односно половина од 100, а тоа се 50 светилки. Така за 15 % се добива дека $100 + 50 = 150$ светилки се црвени.
- б) 120 светилки од 1000 биле сини, запишани како дробка е $\frac{120}{1000}$
240 светилки од 1000 биле зелени или како дробка $\frac{240}{1000}$ и 150 светилки од 1000 биле црвени или како дробка $\frac{150}{1000}$. Секоја од дробките запиши ја како нескратлива дробка.
- в) Прво треба да одредиш колку вкупно биле сини, зелени и црвени светилки. $120 + 240 + 150 = 510$ светилки. Ако останатите до 1000 светилки биле жолти, тогаш $1000 - 510 = 490$. Значи, жолти биле 490 светилки.
Запиши го бројот на жолтите светилки како дробка и како процент.

Пример 3

Во една продавница се продале $\frac{12}{25}$ од зелениот штоф и 38 % од кафеавиот штоф. Ако почетните должини на двата штофа се еднакви, од кој штоф се продало повеќе?

Решение:

Задачата можеш да ја решиш на повеќе начини.

I начин: Дробката и процентите запиши ги како децимални броеви. $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 0,48$.
 $38\% = \frac{38}{100} = 0,38$. $0,48 > 0,38$, значи $\frac{12}{25} > 38\%$. Повеќе се потрошило од зелениот штоф.

II начин: 38 % го запишуваме како дробка, односно $38\% = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$. Дробките $\frac{12}{25}$ и $\frac{19}{50}$ ги сведуваме на еднакви именители, $\frac{12}{25} = \frac{24}{50}$. Се добива $\frac{24}{50} > \frac{19}{50}$. Значи $\frac{12}{25} > 38\%$. (од еднаквите почетни должини)

III начин: Дробката $\frac{12}{25}$ запиши ја во проценти. Имаме $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 48\%$; $48\% > 38\%$. Значи $\frac{12}{25} > 38\%$. (од еднаквите почетни должини)

Задача 2

- а) Користејќи го дијаграмот, запиши колку е $\frac{5}{6}$ од 24.
 б) Нацртај дијаграм со кој ќе претставиш колку е $\frac{3}{7}$ од 14 јаболка?

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Пример 4

Во една продавница за спортска опрема има вкупно 1200 производи. Продавницата има промоција на следниве категории производи што ги имало: 12 % од производите биле патики, 18 % од производите биле текстил, 10 % од производите биле спортски торби. Остатокот од производите биле дополнителни спортски додатоци.

- а) Пресметај колку производи припаѓаат на секоја од првите три категории (патики, текстил и спортски торби).
 б) Пресметај колку производи се дополнителните спортски додатоци.
 в) Запиши го делот на производи текстил како дробка и како процент.
 г) Пресметај колку е разликата меѓу процентите на спортските додатоци и патиките.

Решение:

- а) Вкупниот број на производи е 1200.

Патики: 12 % од 1200 или $\frac{12}{100}$ од 1200 е 12, значи 12 % од 1200 ќе биде $12 \cdot 12 = 144$.

Текстилни производи: 18 % од 1200 е 18, значи 18 % од 1200 ќе биде $18 \cdot 12 = 216$.

Спортски торби: 10 % = $\frac{10}{100}$ од 1200, па се добива $1200 : 10 = 120$. (или од тоа што 1 % од 1200 е 12, 10 % е 10 пати повеќе, односно $10 \cdot 12 = 120$).

- б) За да го најдеш бројот на дополнителни спортски додатоци, прво пресметај колку вкупно има производи од горенаведените категории: $144 + 216 + 120 = 480$ производи. Бидејќи вкупно има 1200 производи, бројот на дополнителни спортски додатоци е: $1200 - 480 = 720$ производи.

- в) Текстилни производи има 216. Запишано како дробка е:

$$\frac{216}{1200} = \frac{216 \cdot 4}{1200 \cdot 4} = \frac{864}{4800} = \frac{18}{600} = \frac{3}{100} = 3\%$$

- г) Бројот на дополнителни спортски додатоци е 720. Запишано како дробка е

$$\frac{720}{1200} = \frac{720 \cdot 12}{1200 \cdot 12} = \frac{8640}{14400} = \frac{60}{100}$$

$\frac{60}{100} = 60\%$. Патики има 12 % од производите, а дополнителни спортски додатоци има 60 % од производите.

Значи $60\% - 12\% = 48\%$ е разликата меѓу процентите на дополнителни производи и патики.

Задача 3

Еден камион со вкупна носивост од 2,4 тони пренесувал песок до градилиште. Првиот пат пренел $\frac{5}{8}$ од 2,4 t, а вториот пат 85 % од својата вкупна носивост. Кога пренел повеќе песок?

Како би можел да ги примениш научените стратегии за пресметување на проценти и дропки за да оцениш и споредиш информации во секојдневниот живот? Наведи конкретен пример каде што ова знаење би можело да ти помогне да донесеш подобра одлука.

Реша (дома или на училиште) ги следните задачи во твојата тетратка за 10 минути:

1. Колку е 23 % од 600?
2. Запиши ја дропката $\frac{34}{50}$ во проценти.
3. Запиши ја дропката $\frac{7}{8}$ како децимален број.
4. $\frac{3}{5}$ од учениците во една паралелка играле кошарка, а 15 % играле тенис.

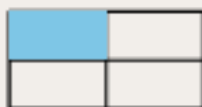
Со кој спорт биле ангажирани повеќе ученици од таа паралелка?

Сподели го одговорот на секоја задача и стратегијата на решавање со твој соученик.

Самостојна работа

1. Запиши ги како проценти дропките: $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{6}{50}$.
2. Запиши ги како дропки процентите: 3 %, 11 %, 16 %, 24 %, 30 %, 55 %, 76 %, 80 %, 250 %.
3. Запиши ги како проценти децималните броеви: 0,06; 0,13; 0,25; 0,5; 0,77; 0,84; 0,9; 0,95; 1,23; 7,7.
4. Претстави го со дропка и процент обоениот дел од формата:

а)



б)



в)



г)



- Еден работник земал 20000 денари плата. Платата му била покачена за 5 %. Колку денари е покачувањето и колкава е платата по покачувањето?
- Цената на еден пар патики била 1000 денари. На крајот од сезоната цената на патиките била намалена за 10 %. По која цена се продавале патиките по намалувањето?
- Во VII* одделение имало 25 ученици. На полугодие 7 ученици имале петка по математика, 9 по мајчин јазик и 12 по биологија. Колку проценти биле одлични по математика, колку по мајчин јазик и колку по биологија?
- Бензинот што до полноќ чинел 70 денари, бил поскапен за 4 %. Која е новата цена на бензинот?
- Во еден летен фудбалски камп $\frac{4}{25}$ од учениците учеле да бидат голмани, $\frac{6}{13}$ да играат на средината на теренот и во одбрана, $\frac{12}{40}$ вежбале за напаѓачи, додека останатите се подготвувале за судии. Изрази ги дропките во проценти и одреди колку проценти од учениците сакале да бидат судии?

Собирање дропки

Дропките се многу важен дел од математиката и ги користиме во секојдневниот живот, на пример, при мерење состојки за готвење, делење количини, пресметување растојанија. Во оваа лекција ќе научиш како правилно да собираш дропки, дури и кога имаат различни именители. Ова знаење ќе ти помогне во понатамошното изучување на математиката, особено при работа со проценти, пропорции и во темата алгебра.



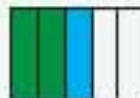
Пример 1

Во училишниот оркестар на едно основно училиште $\frac{2}{5}$ од учениците свиреле на виолина, а $\frac{1}{5}$ од учениците свиреле на виола. Колкав дел од учениците свиреле на овие жичени инструменти?

Решение:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

Значи, $\frac{3}{5}$ од учениците свиреле на некој од двата жичени инструменти.



Задача 1

Во една продавница претпладне се потрошиле $\frac{3}{10}$ од еден топ платно, а попладне за $\frac{1}{10}$ повеќе отколку претпладнето. Колкав дел од топот платно се продал во текот на целиот ден?

Пример 2

Спортското игралиште на едно училиште било поделено на неколку дела. Притоа $\frac{1}{2}$ од него се користела за кошарка, а $\frac{1}{3}$ за тенис. Колкав дел од спортското игралиште се користел за спортските активности кошарка и тенис?

Решение:

Како да го определиме збирот на дропките $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$?

За да ги собереме двете дропки со различен именител, треба претходно да ги донесеме на заеднички именител, а тоа може да биде најмалиот заеднички содржател на нивните именители. НЗС (2, 3) = 6

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ и $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$. Сега дропките имаат еднакви именители и можеме да ги собереме: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Значи $\frac{5}{6}$ од игралиштето се користи за кошарка и тенис.

Две дропки со различен именител се собираат така што прво се доведуваат до ист именител, а потоа се собираат како дропки со ист именител.

Задача 2

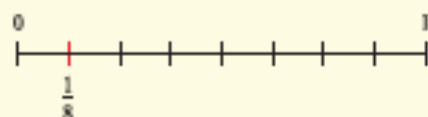
Пресметај: а) $\frac{3}{10} + \frac{2}{9}$ б) $\frac{5}{16} + \frac{3}{5}$ в) $\frac{4}{9} + \frac{3}{11}$

Ако треба да го одредиме збирот на дропките без да пресметуваме, тогаш велиме дека правиме процена.

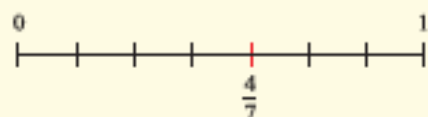
Пример 3

Процени колку е: а) $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ б) $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$?

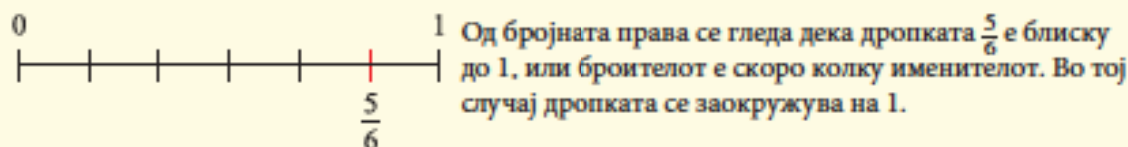
Решение:



Од бројната права се гледа дека дропката $\frac{1}{8}$ е блиску до 0, броителот е помал од половината на именителот. Во тој случај дропката се заокружува на 0.



Од бројната права се гледа дека $\frac{4}{7}$ е блиску до $\frac{1}{2}$, или броителот е околу половината на именителот. Во тој случај дропката се заокружува на $\frac{1}{2}$.



Користејќи го погоре запишаното, имаме:

а) Според цртежите со бројни прави и приближните (проценети) вредности се добива дека $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ е дробка околу $\frac{1}{2}$.

б) Во овој случај збирот $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$ е вредност околу 1.

Задача 3

Процени: а) $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ б) $\frac{9}{10} + \frac{1}{6}$

Пример 4

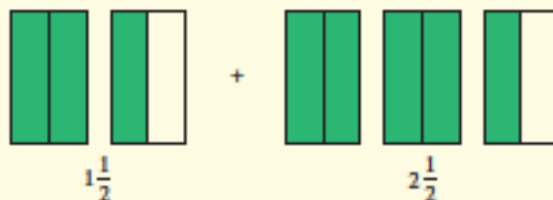
Пресметај $1\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{2}$.

Решение:

Мешаните броеви може да ги собереме на два начини.

I начин: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ Посебно ги собираме целите делови, а посебно дробките
 $= (1 + 2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4.$

II начин: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ Мешаните броеви ги запишуваме како неправилни дробки $= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$



Пример 5

Од една пита кашкавал се продале $5\frac{1}{2}$ kg. Од питата останале $2\frac{1}{4}$ kg. Колку килограми била питата кашкавал на почетокот?

Решение:

I начин: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = (5 + 2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 7 + \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = 7 + \left(\frac{3}{4}\right) = 7\frac{3}{4}$ kg.

II начин: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = \frac{11}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4} = \frac{22}{4} + \frac{1}{4} = \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$ kg.

Значи, питата кашкавал на почеток имала маса $7\frac{3}{4}$ kg.

Задача 4

Пресметај: а) $4\frac{2}{5} + 3\frac{1}{15}$ б) $10\frac{2}{7} + 3\frac{1}{8}$ в) $4\frac{5}{14} + 15\frac{8}{21}$

Пример 6

Еден велосипедист првиот час поминал 28 km, вториот час $2\frac{7}{15}$ km повеќе отколку првиот час, а третиот час $3\frac{1}{30}$ km повеќе отколку првиот час. Колку километри поминал велосипедистот за трите часа?

Решение:

Првиот час поминал 28 km, вториот час $28\text{ km} + 2\frac{7}{15}\text{ km}$ и третиот час $28\text{ km} + 3\frac{1}{30}\text{ km}$. Бидејќи се бара колку километри поминал за три часа, го добиваме изразот:

$$28 + (28 + 2\frac{7}{15}) + (28 + 3\frac{1}{30}) = (28 + 28 + 28 + 2 + 3) + (\frac{7}{15} + \frac{1}{30}) = 89 + (\frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{1}{30}) =$$

$$= 89 + (\frac{14}{30} + \frac{1}{30}) = 89 + \frac{15}{30} = 89 + \frac{15 \cdot 15}{30 \cdot 15} = 89 + \frac{1}{2} = 89\frac{1}{2}\text{ km}$$

Значи, велосипедистот за три часа поминал $89\frac{1}{2}\text{ km}$.

Задача 5

Колкава била должината на една греда од која се исечени четири парчиња со должина 2 m, $1\frac{1}{3}$ m, $5\frac{1}{2}$ m и $\frac{5}{6}$ m?

Во една продавница има два вида чоколада: едните имаат маса $\frac{3}{4}$ од стандардната, а другите $\frac{5}{6}$ од стандардната маса. Ако купиш по едно од двата вида, дали ќе добиеш повеќе или помалку од стандардната маса на 1 чоколадо? Како можеш да го пресметаш тоа?

Реши ги задачите во твојата тетратка, а потоа твоите одговори и стратегијата за решавање на секоја задача сподели ги со соучениците.

1. Пресметај $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$.
2. Ана има $\frac{3}{5}$ од заедничката заштеда, а Петар има $\frac{2}{7}$ од заштедата. Останатиот дел од заштедата е на Дијана. Колкав дел од заштедата имаат заедно Петар и Ана?
3. Пресметај $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}$.
4. Ако имаш $\frac{5}{4}$ чоколадо и уште $\frac{1}{3}$ чоколадо, колку вкупно чоколадо имаш?

Подреди ги буквите од табелата според редоследот на решенијата на задачите за да го определиш скриениот збор.

$3\frac{11}{12}$	$1\frac{7}{15}$	$1\frac{7}{12}$	$\frac{31}{33}$
И	З	Р	Б

Самостојна работа

1. Збирот на дропките $\frac{1}{12}$ и $\frac{5}{28}$ зголеми го за дропката $\frac{1}{14}$.
2. Збирот на дропките $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ и $\frac{4}{15}$ зголеми го за збирот на дропките $\frac{1}{16}$ и $\frac{5}{18}$.
3. Еден тракторист првиот ден изорал $\frac{4}{15}$ од нивата, вториот ден $\frac{7}{20}$ и третиот ден $\frac{7}{30}$ од нивата. Колкав дел од нивата изорал трактористот?
4. Колку е збирот на четири броја ако првиот е $2\frac{3}{5}$, а секој следен е за $2\frac{1}{5}$ поголем од претходниот?
5. Група рудари во понеделник ископале $123\frac{2}{9}$ t јаглен, во вторник $151\frac{5}{6}$ t, во среда $128\frac{2}{4}$ t во четврток $130\frac{7}{12}$ t и во петок 149 t. Колку тони јаглен ископале во текот на петте дена?
6. Еден багер ископува една јама за 10 часа, а вториот ја ископува истата јама за 15 часа. Определи:
 - а) Колкав дел од јамата ќе ископаат двата багера заедно за еден час?
 - б) За колку часа двата багера ќе ја ископаат целата јама?

Одземање дропки

Во претходната лекција учеше како да ги собираш дропките, а со оваа лекција ќе научиш како да ги одземаш.

Замисли дека имаш цело чоколадо поделено на осмини. Ако изедеш 3 парчиња, колку ќе ти останат? Ова е пример за одземање на дропки, каде што започнуваме со одреден број делови и одземаме некои од нив.

Преку примери од секојдневниот живот ќе разбереш зошто ова знаење е корисно и како можеш да го примениш во практични ситуации.



Пример 1

На кружниот дијаграм е дадено како Ајше го распоредува времето во текот на еден ден. Колкав дел од денот Ајше не спие?

Дневни активности на Ајше (24 h)



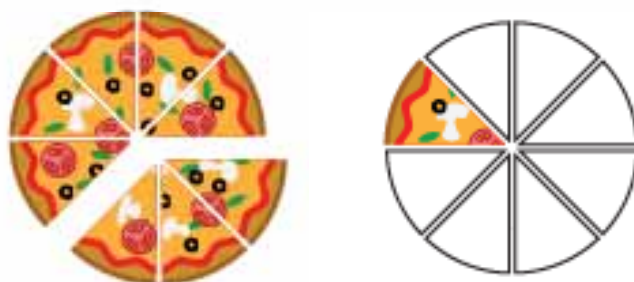
Решение:

Од кружниот дијаграм можеш да воочиш дека Ајше спие $\frac{3}{8}$ од денот, а $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ не спие.

До истото решение ќе дојдеш на друг начин. Ако еден ден се претстави како едно цело, имаме: $1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Објасни зошто наместо 1 запишавме $\frac{8}{8}$.

Пример 2

На цртежот се дадени пици. Од едната пица е земен означениот дел. Колкав дел од пиците останал?



Решение:

Според цртежот имаме $1\frac{1}{8}$ пица од која е одземен дел што претставува $\frac{3}{8}$. Запишуваме $1\frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{3}{4}$. Значи, останало $\frac{3}{4}$ пица.

Задача 1

Најди ги разликите:

а) $\frac{19}{23} - \frac{5}{23} - \frac{7}{23}$ б) $\frac{27}{25} - \frac{9}{25} - \frac{3}{25}$ в) $\frac{14}{17} - \frac{1}{17}$

Задача 2

Пресметај: а) $4 - 1\frac{1}{5}$ б) $3\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5}$

Пример 3

За една театарска претстава се продале карти за $\frac{6}{7}$ од седиштата во театарот. Поради невреме, се пополниле само $\frac{4}{5}$ од седиштата. Колкав дел од седиштата за кои биле продадени карти во театарот останале празни?

Решение:

За да одредиш колкав дел од седиштата за кои биле продадени карти во театарот не биле исполнети поради невремето, потребно е да ја одредиш разликата на двете дробки, односно $\frac{6}{7} - \frac{4}{5}$.

Како и при собирање на дробки со различен именител, така и при одземање на дробки со различен именител мора претходно да ги доведеш дробките до заеднички именител. Тоа може да биде, на пример, најмалиот заеднички содржател на нивните именители, за да работиш со помали броеви при проширување на дробките: НЗС (7, 5) = 35.

$$\frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{30}{35} - \frac{28}{35} = \frac{2}{35}$$

Значи, поради невремето, $\frac{2}{35}$ од седиштата за кои биле продадени карти останале празни.

Две дробки со различен именител се одземаат така што прво се доведуваат до ист именител, а потоа се одземаат како дробки со ист именител.

Пример 4

Пресметај: а) $3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7}$ б) $4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6}$

Решение:

Разликата на дробките можеме да ја најдеме на два начини.

$$\text{а) I начин: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = (3 - 1) + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = 2 + \left(\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 5}\right) = 2 + \left(\frac{21}{35} - \frac{5}{35}\right) = 2 + \frac{16}{35} = 2\frac{16}{35}$$

$$\text{II начин: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = \frac{18}{5} - \frac{8}{7} = \frac{18 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{8 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{126}{35} - \frac{40}{35} = \frac{86}{35} = 2\frac{16}{35} \quad \text{НЗС (5, 7) = 35}$$

$$\text{б) I начин: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = (4 - 1) + \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{10}{12}\right) = 2 + 1 + \frac{7}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{19}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{9}{12} = 2\frac{3}{4}$$

Во постапката одземање добиваме $\frac{7}{12} < \frac{10}{12}$, па затоа „земаме едно цело“ од целиот дел го запишуваме како $\frac{12}{12}$ и го додаваме на дробката $\frac{7}{12}$. Така добиваме $\frac{19}{12}$. Погледни ја постапката повторно.

$$\text{II начин: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{55}{12} - \frac{22}{12} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \quad (\text{Зашто } \frac{33}{12} = \frac{11}{4}?)$$

Задача 3

Кој број зголемен за $\frac{3}{5}$ дава резултат $\frac{2}{3}$?

Задача 4

Пресметај: а) $4\frac{5}{6} - 3\frac{1}{3}$ б) $3\frac{4}{9} - 2\frac{5}{6}$ в) $5\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12} - 2\frac{3}{4}$

Пример 5

Ана имала $4\frac{2}{3}$ килограми брашно. За подготовка на колачи употребила $2\frac{5}{6}$ килограми брашно. Колку брашно ѝ останало?

Решение:

$$4\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6} = \frac{22}{3} - \frac{17}{6} = \frac{22 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{17 \cdot 1}{6 \cdot 1} = \frac{44}{6} - \frac{17}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ kg}$$

На Ана ѝ останало $4\frac{1}{2}$ kg брашно.

Задача 5

Мартин пешачи $5\frac{3}{4}$ километри секое утро. Одно утро пешачел одредено време и застанал по поминати $2\frac{2}{3}$ километри. Колку километри му остануваат од километрите што ги минувал секое утро?

Зошто е важно да знаеме како да одземаме дропки со различни именители во секојдневниот живот? Дали можеш да дадеш пример од реална ситуација каде што ова знаење би ти било корисно?

◊ Размисли за своето знаење и одговори во твојата тетратка со

☒ , ? или X:

☒ – Совршено разбираам и можам самостојно да решавам задачи.

? – Разбираам делумно, но ми треба малку повеќе вежбање.

X – Сè уште не сум сигурен и ми треба дополнителна помош.

1. Можам да одземам дропки со ист именител.
2. Можам да најдам заеднички именител за дропки со различни именители.
3. Можам правилно да одземам дропки со различни именители.
4. Можам да одземам мешани броеви.
5. Можам да применам одземање на дропки во реални ситуации.

Самостојна работа

- Пресметај: а) $2 - \frac{4}{7}$ б) $3\frac{1}{2} - 2$ в) $3 - 1\frac{7}{12}$ г) $5\frac{7}{9} - 5$
- Пресметај: а) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ б) $\frac{8}{9} - \frac{7}{12}$ в) $\frac{1}{10} - \frac{1}{15}$ г) $\frac{27}{40} - \frac{7}{18} - \frac{5}{24}$ д) $\frac{3}{2} - (\frac{5}{6} - \frac{2}{3})$
- Со кој број треба да се зголеми разликата на броевите $4\frac{5}{8}$ и $2\frac{3}{4}$ за да се добие $7\frac{5}{9}$?
- Со кој број треба да се намали збирот на броевите $11\frac{7}{8}$ и $13\frac{5}{12}$ за да се добие 19?
- Еден земјоделец првиот ден ископал $\frac{2}{3}$ од нивата, а вториот ден $\frac{1}{4}$. Колкав дел од нивата му останал да го ископа?
- Еден базен се полни со вода од две цевки, а се празни од трета цевка. Првата цевка го полни за 8 часа, втората за 12 часа, а третата го празни за 6 часа.
 - Кој дел од базенот ќе се наполни за еден час од првите две цевки?
 - За колку часа ќе се наполни целиот базен?
 - Колкав дел од базенот ќе биде полн со вода за еден час ако двете цевки го полнат, а третата го празни?
- Еден пешак поминал 28 km за 6 часа, а велосипедист 33 km за 3 часа. Колку километри повеќе за еден час поминува велосипедистот од пешакот?

Множење дробки

Во оваа лекција ќе научиш како да множиш дробки.

Дробките ти помагаат да претставиш делови од целина, а множењето на дробки ти покажува како да пресметаш дел од дел или да комбинираш делови.

Ќе започнеш со разбирање на основните правила за множење на дробки и ќе видиш како може да ги поедноставиш резултатите. Ќе истражиш примери од секојдневниот живот, како што се делење пица или мерење состојки при готвење, за полесно да разбереш зошто оваа пресметка е важна.



Пример 1

Збирите на еднакви собироци можат да се запишат пократко:

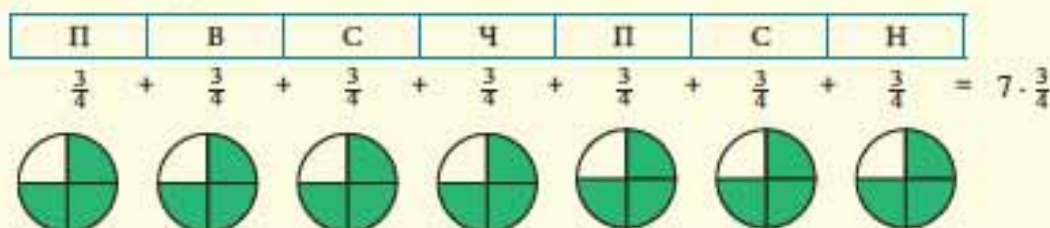
$$7 + 7 = 2 \cdot 7 \quad 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 \quad \underbrace{7 + 7 + 7 + \dots + 7}_{n\text{-собироци}} = n \cdot 7$$

Пример 2

Симона тренирала тенис по $\frac{3}{4}$ од час секој ден. Колку вкупно часа тренирала тенис неделно?

Решение:

Денови во неделата:



Имаме: $7 \cdot 3$ четвртини е 21 четвртина. Запишуваме $7 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.
Значи, Симона во текот на една недела тренирала тенис $5\frac{1}{4}$ часа.

Дропка $\frac{a}{b}$ се множи со природен број n така што броителот на дропката го множиме со природниот број n , а именителот го препишуваме, односно:
 $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$.

Задача 1

Во четири шишиња имало по $\frac{7}{8}$ л сок. Колку вкупно литри сок имало?

Кога множиш природен број со дрпка, треба да внимаваш да не ја изоставиш точката како знак на множење бидејќи производот на природниот број и дропката со изоставен знак за множење нема да се разликува од мешан број.

Ако природниот број n и именителот b на дропката $\frac{a}{b}$ имаат заеднички делител, можеш да ги скратиш пред да помножиш и пресметувањата ќе можеш да ги извршиш со помали броеви.

Пример 3

Пресметај го производот $6 \cdot 1\frac{5}{9}$.

Решение:

$6 \cdot 1\frac{5}{9}$ = Мешаниот број го запишуваме како неправа дрпка $= 6 \cdot \frac{14}{9} = \frac{6 \cdot 14}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$.

Задача 2

Запиши за секоја слика како во примерот под а).



$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$



Пример 4

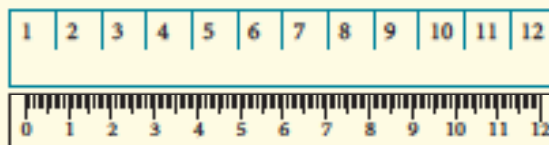
Марко има 12 години, а Сара има $\frac{3}{4}$ од годините на Марко. Колку години има Сара?

Решение:

За да најдеме $\frac{3}{4}$ од 12, можеме да ги преземеме следните чекори:

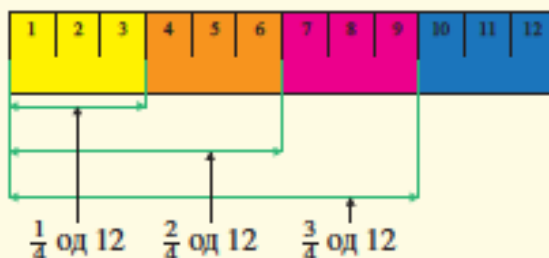
I чекор:

Земаме лента од 12 cm. Ја делиме на делови од 1 cm како на цртежот.



II чекор:

Лентата ја делиме на 4 еднакви дела и секој дел го обојваме со различна боја, како на цртежот.



III чекор:

Искористувајќи ја лентата, ги пополнуваме квадратчињата.

$$\frac{1}{4} \text{ од } 12 = 3, \quad \frac{2}{4} \text{ од } 12 = 6, \quad \frac{3}{4} \text{ од } 12 = 9$$

IV чекор:

$$\frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \quad \frac{2}{4} \cdot 12 = 6 \quad \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

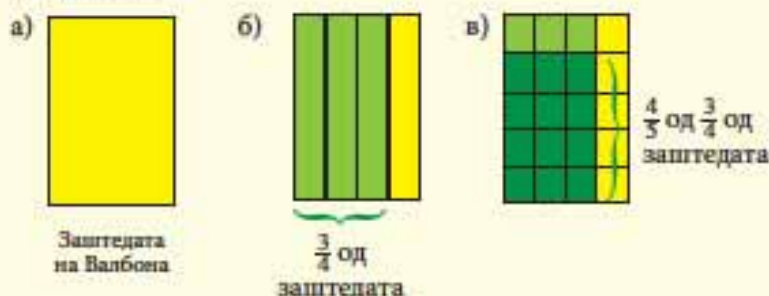
Делот $\frac{a}{b}$ од бројот x е производот $\frac{a}{b} \cdot x$.

Пример 5

Валбона отишла на пазар и со себе зела $\frac{3}{4}$ од заштедата. $\frac{4}{5}$ од парите што ги зела ги потрошила за сувенири. Колкав дел од заштедата потрошила Валбона за сувенири?

Решение:

Валбона потрошила $\frac{4}{5}$ од $\frac{3}{4}$ од заштедата. Со цртежите е прикажано решавањето на проблемот.



Според цртежот под в) $\frac{4}{5}$ од $\frac{3}{4}$ од заштедата што Валбона ги потрошила е претставено со $4 \cdot 3$ од вкупно $5 \cdot 4$ мали правоаголници или 12 од вкупно 20 правоаголници. Запишуваме: $\frac{12}{20}$. Знаеш дека $\frac{4}{5}$ од $\frac{3}{4}$ може да се запише како $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Според примерот,

Производот на две дропки е дробка чиј броител е производ од броителите на дропките множителите, а именител е производот од именителите на дропките множителите.

Пример 6

За роденденската забава што ја организирал Мите биле купени $5\frac{2}{3}$ литри сок. Од нив биле потрошени $\frac{2}{3}$ од вкупното количество сок. Колку литри биле потрошени?

Решение:

$$\frac{2}{3} \text{ од } 5\frac{2}{3} \text{ литри е } \frac{2}{3} \cdot 5\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{17}{3} = \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 3} = \frac{34}{9} = 3\frac{7}{9}$$

Значи, за роденденската забава се потрошиле $3\frac{7}{9}$ литри сок. За да се изврши множењето, претходно мешаниот број се запишува како неправилна дробка. Како би постапил ако треба да помножиш два мешани броја?

Како би можело да се примени вештината за множење на дробка со мешан број во реалниот живот, на пример, при делење храна, материјали или при планирање активности? Објасни со конкретен пример.

Во тетратка одговори на следните прашања.

1. Дали разбрав што е дробка и како се множи дробка со природен број? Да/Не
2. Дали можам да претворам мешан број во неправилна дробка и обратно? Да/Не
3. Дали успеав да решам задачи со множење на дробки и мешани броеви? Да/Не
4. Дали можам да ги применим правилата за множење на дробки во реални ситуации (на пример, при поделба на храна, материјали и слично)? Да/Не

Ако си одговорил/а со „Да“ на повеќето прашања, тоа значи дека добро си ја разбрал/а лекцијата.

Ако си одговорил/а со „Не“ на некои прашања, тоа значи дека треба да ги повториш тие делови за да го подобриш разбирањето.

Запиши што ти беше најтешко во оваа лекција и на што би сакал да работиш повеќе.

Самостојна работа

1. Пресметај: а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ б) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$ в) $\frac{3}{10} \cdot 1\frac{1}{9}$ г) $3\frac{1}{8} \cdot 1\frac{4}{15}$
2. Од 36 ученици $\frac{2}{9}$ се девојчиња. Колку од учениците се девојчиња, а колку момчиња?
3. Покажи дека производот на дробките $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ е еднаков на нивната разлика.
4. Пресметај ја плоштината на правоаголник чии страни се $4\frac{1}{3}$ cm и $3\frac{1}{3}$ cm.
5. Што е поголемо:
а) $\frac{3}{5}$ од 150 или $\frac{5}{9}$ од 180?
б) $\frac{3}{4}$ од $2\frac{2}{9}$ или $\frac{4}{5}$ од $3\frac{3}{4}$?
6. Пресметај:
а) $\frac{3}{5} \cdot (\frac{2}{3} + \frac{3}{4})$ б) $(1\frac{3}{8} + 2\frac{1}{6}) \cdot 1\frac{3}{5}$ в) $(4 - 2\frac{5}{6}) \cdot 2\frac{2}{3}$ г) $1\frac{3}{4} \cdot (1\frac{1}{7} - \frac{3}{14})$
7. Петар вежбал така што: прво трчал $\frac{4}{9}$ од една кружна патека, а потоа возел велосипед $\frac{2}{3}$ од кружната патека. Од вкупната должина што ја поминал, $\frac{2}{3}$ ги поминал под сенка.
а) Колку пати ја поминал кружната патека (колку вкупно кругови поминал)?
б) Колкав дел од кружната патека поминал под сенка?

Делење дробки

Во оваа лекција ќе се фокусираме на делење на дробки, што ќе ти помогне да го примениш концептот на делење во практични ситуации. Замисли дека имаш 3 јаболка и тие се сечени на половинки. Колку луѓе ќе добијат по половина јаболко? За да одговориш на ова прашање, всушност, треба да го определиш количникот $3 : \frac{1}{2}$. Ова е само еден пример за тоа како применуваме делење на дробки во секојдневниот живот. Во оваа лекција ќе вежбаш на конкретни примери, што ќе ти помогне да ги подобриш твоите вештини за делење.



$$3 : \frac{1}{2} = 6$$

Пример 1

Весна имала $\frac{4}{5}$ од торта. Таа изела $\frac{1}{3}$ од својот дел од тортата. Колкав дел од тортата изела? Прикажи го твојот одговор и со дијаграм.

Задача 1

- Колку групи од по 2 портокали можеш да направиш од 6 портокали? Запиши го решението со соодветната математичка операција.
- Колку четвртини има во една половина? Со која математичка операција можеш да го прикажеш решението?

Пример 2

Пресметај: а) $3 \cdot \frac{1}{3}$ б) $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2}$ в) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$

Решение:

$$\text{а) } 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{б) } \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 2} = \frac{14}{14} = 1 \quad \text{в) } 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{21}{21} = 1$$

Во дадениот пример очигледно е дека броителот на првата дробка е еднаков на именителот на втората дробка и именителот на првата дробка е еднаков на броителот на втората дробка. Производот на таквите дробки е 1.

Реципрочни дробки се две дробки чиј производ е 1.

Задача 2

Запиши ги реципрочните дробки на: $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{10}$, 5, $4\frac{3}{5}$, $\frac{21}{25}$.

Пример 3

Наталија и Петар требало да си поделат $\frac{4}{5}$ чоколадо на еднакви делови.

Наталија постапила вака: 4 петтини ги поделила со 2 и секој добил 2 петтини.

Запишала: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{2}{5}$

Петар постапил вака: секоја петтина ја поделил на два еднакви дела и од секоја петтина добил по две десеттини. Значи, секој добил по 4 десеттини.

Запишал: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$



Наталија и Петар и со двата начини на решавање добиле исти делови од чоколадото.

Значи, може да се подели дробка со природен број на два начини: нејзиниот броител да се подели со тој број или нејзиниот именител да се помножи со тој број, односно:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b} \text{ или } \frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}.$$

Пример 4

Пресметај $\frac{2}{7} : 3$.

Решение:

I начин: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2 \cdot 3}{7}$

II начин: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$

Бидејќи во првиот начин броителот не е делив со природниот број, попрактично е дробката да ја поделиме со природниот број на вториот начин. Затоа, може да се рече дека втората постапка има поширока примена.

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}, \text{ каде што } \frac{1}{n} \text{ е реципрочна дробка на } n.$$

Дробка се дели со природен број така што дробката се множи со реципрочната вредност на природниот број.

Пример 5

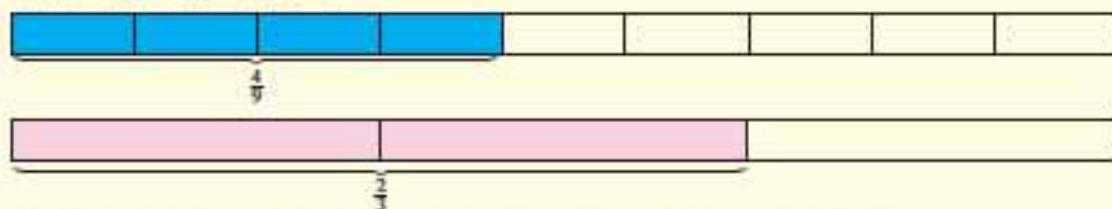
Илир требало да пресмета:

а) $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$ б) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

Решение:

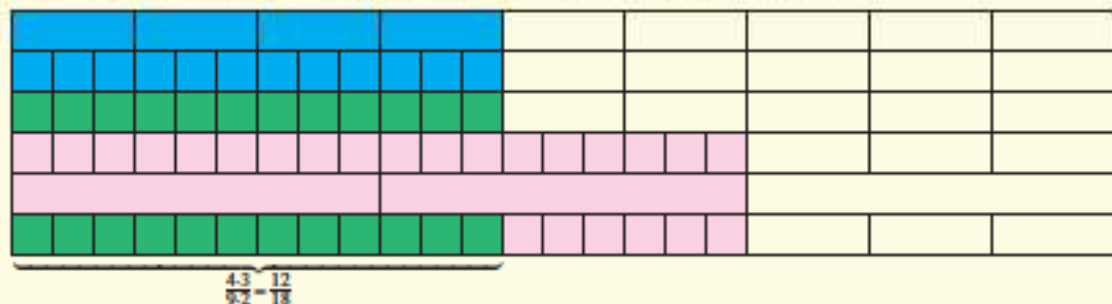
- а) Илир знаел како се множат две дропки и дека делењето е обратна операција на множењето и пресметал на следниот начин: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. За да биде сигурен дека е точна постапката, тој направил проверка $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$.

Се обидел и со дијаграми. Притоа, според операцијата која треба да ја изврши, барал одговор на прашањето „Колку $\frac{2}{3}$ има во $\frac{4}{9}$ “? Одговорот на ова прашање го добил кога определил колкав дел обоен со розова боја целосно го покрива делот со сина боја. Така го добил делот обоен со зелена боја, кој претставува $\frac{12}{18}$. Потоа ја скратил добиената дропка и добил $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$, што значи истиот резултат како во првиот случај. Објасни како дијаграмот на Илир е поврзан со записот за делењето на двете дропки.



Секоја од четирите деветтини се дели на третини = $4 \cdot 3$ дела = 12 дела

Има по 9 такви делови во секоја од двете третини = $9 \cdot 2$ дела



Од дијаграмот забележал дека ова може да се запише како производ односно дропката деленик е помножена со реципрочната дропка на дропката делител.

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

множење со реципрочна дропка на $\frac{2}{3}$

- б) Илир се обидел да го искористи првиот начин како под а), односно запишал $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$, но дошол до ситуација кога при делењето не се добива цел број ниту во броителот ниту во именителот, па затоа пресметал на вториот начин $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$. Повторно може да се заклучи дека при делење на дропка со дропка попрактично е деленикот да се помножи со реципрочната дропка на делителот.

Дропка се дели со дропка така што деленикот го множиме со реципрочната дропка на делителот, односно $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Задача 3

Пресметај: а) $1\frac{1}{6} : 3$ б) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ в) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ г) $\frac{7}{12} : \frac{3}{5}$

Пример 6

Мајката на Кире за $3\frac{1}{4}$ kg брашно потрошила 260 денари. Колку чини 1 kg брашно?

Решение:

Потрошените пари се делат со купените килограми брашно. Имаме:

$$260 : 3\frac{1}{4} = 260 : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} \cdot \frac{4}{13} = \frac{260 \cdot 4}{1 \cdot 13} = \left\{ \frac{260 \cdot 13}{13 \cdot 13} = \frac{20}{1} \right\} \cdot 4 = \frac{20 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{80}{1} = 80$$

260 и 13 можат да
се скратат со 13

Значи, 1 kg брашно чини 80 денари.

Задача 4

Бојан има парчиња од летви со должина $\frac{2}{7}$ m. Сака да направи куќичка на дрво со прозорец кој има должина $\frac{4}{5}$ m. Колку парчиња летви од $\frac{2}{7}$ m ќе има во должината од $\frac{4}{5}$ m?

Ако знаеш како да множиш и да делиш цели броеви, зошто при делењето на дробки користиме множење? Објасни го твоето размислување со пример.

Во тетратка одговори на прашањата.

1. Го разбираам ли правилото за делење на дробки?
 - Да, знам дека треба да го помножам деленикот со реципрочната дробка на делителот.
 - Делумно, ми треба уште малку вежбање.
 - Не, сè уште не ми е јасно и ми треба дополнително објаснување.
2. Можам ли самостојно да решам задача со делење на дробки?
 - Да, можам без грешка.
 - Можам, но понекогаш грешам.
 - Тешко ми е и не знам како да почнам.
3. Можам ли да објаснам зошто при делењето на дробки користиме множење?
 - Да, можам да објаснам со свои зборови.
 - Делумно, разбираам, но не знам како да го објаснам.
 - Не, сè уште не ми е јасно.

4. Како се чувствувам во врска со денешната лекција?

- Сигурен/а сум во моите знаења.
- Треба уште малку да вежбам.
- Ова ми беше тешко, потребна ми е помош.

Ако имаш повеќе од првиот понуден одговор на прашањата, значи дека си ја совладал лекцијата.

Ако повеќето од твоите одговори се вториот понуден одговор од прашањата, ти треба уште малку вежбање.

Ако имаш повеќе од третиот понуден одговор на прашањата, потребна ти е дополнителна поддршка и објаснување.

Самостојна работа

1. Пресметај:

а) $\frac{4}{5} : 2$ б) $\frac{3}{4} : 3$ в) $\frac{4}{9} : 6$ г) $3\frac{3}{8} : 9$ д) $5\frac{4}{7} : 9$

2. Пресметај го количникот:

а) $\frac{12}{25} : \frac{4}{5}$ б) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ в) $2 : \frac{1}{4}$ г) $1\frac{11}{12} : \frac{9}{14}$ д) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ е) $6\frac{8}{9} : 4\frac{1}{12}$

3. Пресметај:

а) $(1 - \frac{3}{4}) : \frac{5}{16}$ б) $(2\frac{7}{12} - 1\frac{1}{2}) : 2\frac{3}{11}$ в) $\frac{9}{14} : (1\frac{2}{7} + 1\frac{1}{3})$

4. За $3\frac{3}{4}$ kg јаболка платено е 300 денари. Колку денари е еден килограм јаболка?

5. Едно пакување шеќер собира $\frac{1}{8}$ kg шеќер. Колку такви пакувања со шеќер може да се направат од $31\frac{1}{4}$ kg шеќер?

6. Колку леба може да се направат од 180 kg брашно ако за 1 леб е потребно $\frac{3}{4}$ kg брашно?

Собирање и одземање децимални броеви со различен број на децимали

Досега научи како да собираш и да одземаш децимални броеви со ист број на децимали. Ги подредуваше броевите еден под друг според децималната запирка и ги пресметуваше исто како природните броеви.

Но, што се случува кога броевите имаат различен број на децимали? На пример, како би пресметал $12,5 + 3,27$? Дали можеш веднаш да ги собереш или прво треба нешто да направиш? Во оваа лекција ќе научиш како да изедначуваш број на децимали со додавање нули за правилно да го определиш збирот или разликата на децималните броеви.



Пример 1

Лана штеди пари за нова книга. Првата седмица заштедила 3,25 €, а втората уште 4,50 €.

- Колку вкупно пари има заштедено по две седмици?
- Потоа, Лана решила да купи прибор за цртање кој чини 5,75 €. Колку пари ѝ останале по купувањето?

Решение:

$$а) 3,25 + 4,50 = 3\frac{25}{100} + 4\frac{50}{100} = (3 + 4) + \left(\frac{25}{100} + \frac{50}{100}\right) = 7 + \frac{75}{100} = 7,75.$$

Дали можеш да решиш на друг начин?

Лана има заштедено вкупно 7,75 €.

- Потоа, Лана решила да купи прибор за цртање кој чини 5,75 €.

$$7,75 - 5,75 = 7\frac{75}{100} - 5\frac{75}{100} = (7 - 5) + \left(\frac{75}{100} - \frac{75}{100}\right) = 2 + 0 = 2,00$$

На Лана ѝ останале 2,00 €.

Пример 2

Едно земјоделско стопанство има $176,32 \text{ hm}^2$ ниви, $7,3 \text{ hm}^2$ ливади, $26,362 \text{ hm}^2$ лозја и 19 hm^2 овоштарници. Колкава е вкупната плоштина што ја има земјоделското стопанство?

Решение:

За да ја пресметаш вкупната плоштина, треба да ги собереш сите плоштини.

$$\begin{aligned} \text{I начин: } 176,32 + 7,3 + 26,362 + 19 &= 176\frac{32}{100} + 7\frac{3}{10} + 26\frac{362}{1000} + 19 = \\ &= (176 + 7 + 26 + 19) + \left(\frac{32}{100} + \frac{3}{10} + \frac{362}{1000}\right) = \end{aligned}$$

Во втората заграда собираш дропки со различен именител. НЗС $(10, 100, 1000) = 1000$

$$= 228 + \left(\frac{32 \cdot 10}{100 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 100}{10 \cdot 100} + \frac{362}{1000} \right) = 228 + \left(\frac{320}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{362}{1000} \right) =$$

$$= 228 + \frac{982}{1000} = 228 \frac{982}{1000} = 228,982$$

Значи, земјоделското стопанство има $228,982 \text{ hm}^2$.

II начин: Како и кај природните броеви, и овде при запишувањето треба да се внимава на позициите на цифрите во броевите. Стотинките да се запишуваат под стотинки, десеттинките се запишуваат под десеттинки, единиците под единици, десетките под десетки итн.

Во вториот начин ќе го користиме првото својство на децималните броеви за да не се направи грешка при запишување на децималните броеви вертикално, еден под друг. Потоа собираш како природни броеви. Само внимавај да ја запишеш запирката кога ќе завршиш со собирање на децималниот дел од децималните броеви.

$$\begin{array}{r} 176,320 \\ 7,300 \\ 26,362 \\ 19,000 \\ \hline 228,982 \end{array}$$

Пример 3

Пресметај ја разликата на децималните броеви $27,63$ и $3,796$.

Решение:

I начин:

$$27,63 - 3,796 = 27 \frac{63}{100} - 3 \frac{796}{1000} = (27 - 3) + \left(\frac{63}{100} - \frac{796}{1000} \right)$$

$$= 24 + \left(\frac{63 \cdot 10}{100 \cdot 10} - \frac{796}{1000} \right) = 24 + \left(\frac{630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = \boxed{796 > 630}$$

Зошто дропката
намаленик има
броител 1630?

$$= 23 + \left(\frac{1630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = 23 + \frac{834}{1000} = 23 \frac{834}{1000} = 23,834$$

II начин: Одземај како природни броеви. Внимавај на запирката.

Пример 4

Ана отишла во продавница и купила: 1 l сок за 82,5 денари, 300 g чоколадни колачи за 135 денари и 250 g сирење за 97,75 денари. Ана во паричникот носела 500 денари.

а) Колку денари вкупно потрошила Ана? б) Колку денари ѝ останале по купувањето?

Подоцна, решила да купи и нотес кој чини 185,5 денари.

в) Дали ќе ѝ останат повеќе од 50 денари по ова купување?

Решение:

- а) Вкупна сума за купените производи е:

$$82,5 + 135 + 97,75 = 82,50 + 135,00 + 97,75 \\ = 217,50 + 97,75 = 315,25.$$

Ана потрошила 315,25 денари за првото купување.

- б) Пари што ѝ останале:
- $500 - 315,25 = 500,00 - 315,25 = 184,75$
- .

На Ана ѝ останале 184,75 денари.

- в) Нотесот чинел
- $185,50 > 184,75$
- . Значи Ана немала пари за да го купи нотесот.

Не, на Ана нема да ѝ останат повеќе од 50 денари бидејќи нема доволно пари ни да го купи нотесот.

Можеш да собираш и хоризонтално.
При собирањето внимавај на позицијата на цифрите во броевите што ги собираш.

Задача 1

Кој број е за 723,864 поголем од збирот на броевите 27,8 и 1364,03?

Задача 2

За колку е поголем збирот на броевите 37,9 и 3,79 од нивната разлика?

Задача 3

Абдураман има заштедено пари за своето патување. Тој купува билет за автобус за 175,5 денари, сувенир за 120,75 денари и појадок за 75,20 денари.

- а) Колку денари потрошил Абдураман за сите овие работи?
 б) Тој носел со себе 600 денари. Колку денари му останале по сè што купил?
 в) Потоа, Абдураман решил да купи и книга која чини 210,60 денари. Дали ќе му останат доволно пари по купувањето на книгата?

Имаш 1000 денари и треба да купиш: книга за 245,60 денари, капа за 385,45 денари и оброк за 132,75 денари.

Како ќе ги распоредиш парите и дали ќе ти останат пари за нешто друго? Објасни го својот пристап и како ќе ги пресметаш трошоците.

Реши ги следните задачи во тетратката:

1. $6,73 + 0,8$ 2. $16,37 - 7,8$ 3. $13 - (7,8 + 0,95)$

Заврши со кратка рефлексija: Што научив денес? Што треба да повторам?

Самостојна работа

1. Пресметај:

- а) $0,32 + 1,08$ б) $0,064 + 1,32 + 2,4$ в) $12,056 + 0,8 + 3,25$
г) $357 - 1,02$ д) $1,3 - 0,75$ е) $2 - 0,375$

2. Пресметај:

- а) $7,56 - (3,2 + 1,08)$ б) $15 - (14,3 - 7,28)$
в) $(1,567 - 0,32) + (2,3 - 0,54)$ г) $(5,61 - 1,8) - (0,005 + 1,7)$

3. Дијаметарот на Земјата, кој ги спојува половите, е $12713,824 \text{ km}$, а дијаметарот на екваторот е подолг за $42,96 \text{ km}$. Колку е дијаметарот на екваторот?

4. Телото што слободно паѓа (од некоја висина кон површината на Земјата) во првата секунда минува $4,905 \text{ m}$, а секоја следна секунда по $9,81 \text{ m}$ повеќе. Определи колкав пат ќе помине телото за: а) 2 секунди б) 3 секунди в) 5 секунди.

5. Пресметај на два начини:

- а) $2,75 + \frac{3}{5} + 13,5$ б) $7,2 + \frac{7}{25}$ в) $7,25 + 1\frac{3}{4} + 3,2$
г) $17,6 - 3\frac{21}{40} - 5,725$ д) $12\frac{3}{5} - 7,32 + 3\frac{3}{4}$

6. Во едно стовариште за градежни материјали има $73,56 \text{ t}$ цемент. Првиот ден се продадени $25,745 \text{ t}$, вториот $31,63 \text{ t}$, а третиот ден се донесени $17,4 \text{ t}$, но се продадени 23 t . Определи колку цемент останало во стовариштето?

7. Од топ платно со должина од 34 m се отсечени парчиња со должина: $3,7 \text{ m}$, $7,25 \text{ m}$, $0,83 \text{ m}$, 5 m и $13,72 \text{ m}$. Колку метри платно останало?

8. Една мокра тула има маса од $4,5 \text{ kg}$. По сушењето таа губи маса од $0,8 \text{ kg}$, а по печењето губи уште $0,6 \text{ kg}$. Колкава маса има тулата по печењето?

9. Виктор, Марина и Исет заедно имаат маса $184,7 \text{ kg}$. Виктор и Марина заедно имаат маса $116,5 \text{ kg}$, а Марина и Исет $114,8 \text{ kg}$. Колку килограми е масата на секој од нив?

10. Претстави ги на табеларен начин множествата:

- $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ и } 0,5 < x < 6,5\}$, $B = \{x | 4,82 < x < 4,91 \text{ и } x \text{ има две децимали}\}$ и
 $C = \{x | x < 2,5 < x + 1 \text{ и } x \in \mathbb{N}\}$

Множење и делење децимални броеви

Децималните броеви ги користиш во секојдневниот живот, особено при мерења, пресметки со пари, брзина, тежина и многу други ситуации. За да можеш точно да извршуваш математички операции со нив, потребно е да разбереш како правилно се множат и делат децимални броеви.

Досега веќе си се запознал со основните пресметки со децимални броеви, но нов предизвик ќе биде множењето на децимални броеви кои имаат различен број на децимални места.

Ќе научиш како да ги приспособиш броевите за полесно и попрецизно пресметување.

Со совладување на овие операции ќе можеш успешно да применуваш децимални броеви во секојдневни ситуации и да пресметуваш точно и прецизно.



Пример 1

Периметарот на еден квадрат е 18,8 cm.

- Пресметај ја страната на квадратот.
- Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник со крак 5,4 cm, ако должината на основата е еднаква со должината на страната на квадратот.
- Пресметај го периметарот на правоаголник чија должина е еднаква со кракот на триаголникот, а ширината е еднаква на страната на квадратот.

Решение:

- Периметарот на квадратот $L = 4 \cdot a$. Ако замениме во формулата за L , добиваме $18,8 = 4 \cdot a$. За да ја пресметаме страната, треба периметарот да го поделиме со 4. Пресметај ја страната на квадратот со користење на предзнаењата за делење на децимален број со една децимала со природен број.
- Периметарот на триаголникот, $L = 5,4 \cdot 2 + 4,7 = 10,8 + 4,7 = 15,5$ cm.
- Периметарот на правоаголникот $L = 5,4 \cdot 2 + 4,7 \cdot 2 = 10,8 + 9,4 = 20,2$ cm.

Задача 1

На бројот 328,4 додај му стоти дел од бројот 61267.

Пример 2

Производот на броевите 3,26 и 1,8 намали го за 1,3.

Решение:

Искористувајќи го знаењето за множење на природни броеви, односно 3,26 го зголемуваме 100 пати, а 1,8 го зголемуваме 10 пати и добиваме:

$$(3,26 \cdot 100) \cdot (1,8 \cdot 10) = 326 \cdot 19 = 5868.$$

Производот 5868 е 1000 пати поголем од производот на броевите 3,26 и 1,8. Зошто 1000 пати? Затоа 5868 го намалуваме 1000 пати, односно $5868 : 1000 = 5,868$ е производот на броевите 3,26 и 1,8. Колку децимални места има бројот 5,868, т.е. производот на броевите 3,26 и 1,8? Останува да го намалиш производот 5,868 за 1,3, односно да ја пресметаш разликата $5,868 - 1,3$.

Два децимални броја множиме на следниот начин: ја изоставаме запирката на децималните броеви и ги множиме добиените природни броеви, а потоа во резултатот издвојуваме оддесно налево онолку децимални места колку што имаат заедно дадените децимални броеви.

Пример 3

Пресметај: а) $5,46 : 2,5$ б) $6,4 : 10,24$

Решение:

а) За да поделиме два децимални броја, ќе го искористиме предзнаењето за делење на децимален број со природен број. Затоа, делењето на децималните броеви ќе го сведеме на делење на децимален број со природен број.

За да го направиме делителот природен број, деленикот 5,46 и делителот 2,5 ги множиме со 10. Децималната запирка и кај двата броја се поместува надесно за едно место и задачата се сведува на делење на децимален број со природен број. Се добива:

$$5,46 : 2,5 = (5,46 \cdot 10) : (2,5 \cdot 10) = 54,6 : 25$$

$$54,6 : 25 = 2,184$$

$$\begin{array}{r} -50 \\ \hline 46 \\ -25 \\ \hline 210 \\ -200 \\ \hline 100 \\ -100 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$8 : 2 = 4$$

$$(8 \cdot 4) : (2 \cdot 4) = 32 : 8 = 4$$

Обиди се и со други слични примери, што можеш да заклучиш?

$$б) 6,4 : 10,24 = (6,4 \cdot 100) : (10,24 \cdot 100) = 640 : 1024$$

$$640 : 1024 = 0,625$$

$$\begin{array}{r} 6400 \\ -6144 \\ \hline 2560 \\ -2048 \\ \hline 5120 \\ -5120 \\ \hline 0 \end{array}$$

Повторно разгледај го делењето под а и б. Како се делат децимални броеви?

Децимален број се дели со децимален број така што деленикот и делителот ги множиме со десетична единица со онолку нули колку што има децимални места делителот, а потоа делиме како децимален број со природен број (или природен со природен број). Како резултат на ова делење, се добива децимален број (конечен или бесконечен).

Задача 2

Колкава е цената на еден метар штоф за панталони ако за 2,5 m купувачот платил 483,75 денари?

Пример 4

Петра продава органска храна, има 126,4 килограми и сака да ги пакува. Таа планира да ги спакува во пакувања од по 0,25 килограми.

- Колку пакувања ќе направи Петра?
- Колку ќе заработи ако од едно пакување има заработка од 1,03 евра?

Решение:

- За да пресметаме колку пакувања ќе направи Петра, треба да ја поделиме вкупната маса од 126,4 kg со масата на 1 пакување, 0,25 kg. $126,4 : 0,25 = (126,4 \cdot 100) : (0,25 \cdot 100) = 12640 : 25$

$$12640 : 25 = 505,6$$

$$\begin{array}{r} 12640 \\ -125 \\ \hline 140 \\ -125 \\ \hline 150 \\ -150 \\ \hline 0 \end{array}$$

Добиениот количник 505,6 е децимален број, така што за бројот на пакувања (кој во секој случај е природен број) треба да направиме заокружување на целиот дел и тоа со намалување, односно Петра ќе подготви 505 пакувања.

- б) За да пресметаме колку ќе заработи Петра од продажбата на 505 пакувања од органската храна, треба да помножиме 505 со 1,03, односно $505 \cdot 1,03 = 520,15$ евра.

Во зависност од контекстот на проблемот, често е потребно заокружување на децималните броеви на цел број (со вишок или со кусок).

Пример 5

На училишна екскурзија патуваат 144 ученици. Ако секој автобус со кој ќе се превезуваат има капацитет за 44 ученици, колку автобуси се потребни за организација на екскурзијата?

Решение:

$144 : 44 = 3,27$ и заокружуваме на 4 автобуси за да има место за сите ученици, иако некој од нив нема да биде исполнет до последното место.

Задача 3

- а) Петар работи како дизајнер и заработува 4,25 евра на час. Еден ден работел 6,4 часа. Колку евра заработил тој ден?
- б) Подоцна, тој одлучил заработените пари еднакво да ги подели во 4 дена за дневни трошоци. Колку евра ќе троши дневно?

Задача 4

Кројачот имал 6 парчиња од еден вид платно, секое долго по 12,56 m. Од платното кројачот сошил детски фустанчиња, сечејки по 1,57 m за секое фустанче. Колку фустанчиња сошил кројачот?

Зошто при множење на децимални броеви резултатот може да има повеќе или помалку децимални места од множителите? Што се случува при делење на децимални броеви – како одредуваме каде ќе се наоѓа децималната запирка во резултатот?

За да процениш колку добро ја совлада лекцијата, одговори во тетратка на следните прашања со „Да“, „Делумно“ или „Не“:

1. Дали разбираам каде се става децималната запирка при множење на децимални броеви?
2. Дали можам правилно да делаам децимален број со природен број?
3. Дали знам како да делаам два децимални броја со ист или различен број на децимални места?
4. Дали можам да ги применам овие пресметки во реални ситуации?

Ако на сите прашања одговори со „Да“, одлично си ја совладал лекцијата!

Ако имаш „Делумно“ или „Не“ како одговор, размисли што ти е најтешко и побарај помош или повторно вежбај.

Самостојна работа

1. Пресметај:
 - а) $0,2 \cdot 0,3$ б) $0,7 \cdot 4,22$ в) $1,01 \cdot 6,9$ г) $0,072 \cdot 0,8$ д) $2,536 \cdot 1,55$
2. Пресметај:
 - а) $6,26 \cdot 10 + 3,2 \cdot 0,5$ б) $0,98 \cdot 40 - 2,7 \cdot 6,16$
3. Ако еден литар масло за јадење во продавница чини 61,5 денари, колку пари се потребни за да се купи кутија со 16 шишиња од 1 литар?
4. Од еден килограм трева се добива 0,23 kg сено.
 - а) Колку килограми сено ќе се добијат од 23436 kg трева?
 - б) Колку пари ќе се добијат од сеното ако се продаде за цена од 20,5 денари за 1 kg?
5. Пресметај:
 - а) $7,5 : 5$ б) $0,3 : 3$ в) $4,5 : 9$ г) $4 : 0,2$ д) $28 : 0,4$
 - е) $12 : 0,006$ ж) $146,3 : 41,8$ з) $9,2 : 0,46$ с) $37,37 : 5,05$
 - и) $79,2 : 2,88$
6. Патник поминал 28,305 km за 9 часа? Колку просечно пешачел за еден час?
7. Градинарот купил пумпа за наводнување за 7589,34 денари и уште 41,4 метри црево. По која цена му наплатиле по метар за црево ако вкупната сметка изнесува 8932,77 денари?
8. Од една цевка за 8 часа истекуваат 163,2 литри вода, а од другата цевка истекува истото количество за 6 часа. Колку вода ќе истече од двете цевки за 21 час?

Врска меѓу размер и дел од целина

Во секојдневниот живот често се среќаваш со споредби меѓу делови и целини, на пример, кога подготвуваш рецепт, правиш планови за градба или споредуваш мапи и вистински растојанија. Оваа врска ја изразуваш со размер и дел од целината. Досега си учел за делови од целината преку дропки, како и за процентите. Во оваа лекција ќе откриеш дека размерот е тесно поврзан со овие концепти. Ќе научиш како да го користиш размерот за да пресметаш дел од дадена целина, но и како од даден дел да ја одредиш целината. Ова знаење ќе ти помогне подобро да разбереш пропорционалност, да решаваш практични проблеми и да правиш точни пресметки во секојдневни ситуации.



Пример 1

Во една училница има 30 ученици. Од нив 18 се девојчиња, а останатите се момчиња.

- Во каков размер (сооднос) е бројот на девојчињата и бројот на момчињата?
- Во каков размер е бројот на девојчињата во однос на вкупниот број ученици?
- Во каков размер е бројот на момчињата во однос на вкупниот број ученици?

Решение:

- Прво, ќе го пресметаме бројот на момчињата: $30 - 18 = 12$. Значи, во училницата има 12 момчиња. Размерот (соодносот) на девојчињата во однос на момчињата е: $18 : 12$. Го упростуваме со делење на двата броја со 6, односно $(18 : 6) : (12 : 6) = 3 : 2$. Значи, соодносот на девојчињата и момчињата е $3 : 2$. Упростувањето размер е слично како упростувањето (или кратењето) дропки, до нескратлива форма.
- Размерот на девојчињата во однос на вкупниот број ученици е: $18 : 30$. Го упростувај размерот со делење на двата броја со 6, $18 : 30 = 3 : 5$. Значи, размерот на девојчињата во однос на сите ученици е $3 : 5$.
- Размерот на момчињата во однос на вкупниот број ученици е: $12 : 30$. Го упростувај со делење на двата броја со 6, $12 : 30 = 2 : 5$. Значи, размерот на момчињата во однос на сите ученици е $2 : 5$.

Задача 1

Во една кутија има 9 црвени и 6 сини топчиња.

- Одреди го соодносот (размерот) на црвени и сини топчиња.
- Одреди го соодносот на црвени топчиња и вкупниот број на топчиња.
- Одреди го соодносот на сини топчиња и вкупниот број на топчиња.

Пример 2

Ана прави интегрални бисквити. Таа има чинија со 24 колачи и сака да ги подели така што $\frac{1}{3}$ од бисквитите ќе му ги даде на брат ѝ, а остатокот ќе ги задржи за себе.

- Колку бисквити ќе добие братот на Ана?
- Во каков размер се бисквитите што ги добил братот во однос на сите бисквити?
- Во каков размер се бисквитите што ги задржала Ана во однос на сите бисквити?
- Во каков размер се бисквитите на братот со бисквитите на Ана? Која е врската со дробките $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$?

Решение:

- Братот на Ана ќе добие $\frac{1}{3}$ од 24 бисквити. Сега знаеш дека наместо зборот „од“ ставаме множење (потсети се на лекцијата за множење на дробка со природен број, односно определување на дел од целина), односно $\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{1 \cdot 24}{3} = \frac{24}{3} = 8$. Значи, братот добива 8 бисквити.
- Бисквитите што ги добил братот во однос на сите бисквити се во размер $8 : 24$. Знаеме дека $8 : 24 = (8 : 8) : (24 : 8) = 1 : 3$. Значи, братот добива 1 дел од 3.
- Ана ги задржува останатите бисквити: $24 - 8 = 16$. Размерот на бисквитите што ги задржала Ана во однос на сите бисквити е $16 : 24 = (16 : 8) : (24 : 8) = 2 : 3$. Значи, Ана задржува 2 дела од 3.
- Размерот од бројот на бисквити на братот наспрема бројот на бисквити на Ана е $8 : 16 = 1$ (дел за брат) : 2 (дел за Ана). Значи бисквитите се поделени на вкупно $1 + 2 = 3$ дела. Очигледна е врската со дробките $\frac{1}{3}$ (братот добива 1 од 3 дела) и $\frac{2}{3}$ (Ана задржува 2 од вкупно 3 дела на кои се поделени сите бисквити).

Задача 2

Весна и Валбона сакаат да поделат 1800 денари во размер $1 : 3$. Пресметај колку пари ќе добие секоја од нив.

Пример 3

Марко и Милена купиле чоколадо со 30 коцки и одлучиле да го поделат во размер $2 : 3$ (за секои 2 коцки што ќе ги добие Марко, Милена ќе добие 3).



- а) Колку коцки ќе добие секој од нив?
- б) Во каков размер е бројот на коцки од чоколадото што го зел Марко и сите коцки од чоколадото?
- в) Во каков размер е бројот на коцки од чоколадото што го зела Милена и сите коцки од чоколадото?

Решение:

- а) Дадениот размер е $2 : 3$. Збирот на деловите во размерот е $2 + 3 = 5$.
Вкупниот број на коцки е 30, значи во еден дел има $30 : 5 = 6$ парчиња од 5 коцки чоколадо.
Марко добива $2 \cdot 6 = 12$ коцки.
Милена добива $3 \cdot 6 = 18$ коцки.
 - б) Бројот на коцки што ги зел Марко е во размер $12 : 30$ со сите коцки од чоколадото. Ако се упрости размерот, се добива $2 : 5$.
 - в) Бројот на коцки што ги зела Милена е во размер $18 : 30$ од сите коцки од чоколадото. Ако се упрости размерот, се добива $3 : 5$.
- Дополнително одреди колкав дел од сите коцки од чоколадото зел Марко, а колкав дел зела Милена.

Ако имаш 40 знаменца и треба да ги поделиш меѓу тебе и твојот другар во размер $3 : 5$, како ќе пресметаш колку знаменца ќе добие секој од вас? Можеш ли да објасниш зошто оваа поделба е фер според дадениот размер?

На крајот од лекцијата може да се оцениш според следниве критериуми:

1. Мојам ли да препознам различни размери во дадени примери?
(1 - не можам, 3 - можам со помош, 5 - можам самостојно)
2. Мојам ли да ја поделам целината според даден размер и да го пресметам бројот на делови?
(1 - не можам, 3 - можам со помош, 5 - можам самостојно)
3. Мојам ли да ги применам научените вештини за поделба на количини во секојдневни примери (на пр., поделба на храна, пари и сл.)?
(1 - не можам, 3 - можам со помош, 5 - можам самостојно)
4. Мојам ли да објаснам како размерот влијае врз тоа како ќе се подели целината?
(1 - не можам, 3 - можам со помош, 5 - можам самостојно)

По самооценувањето, може да разговараш за своите резултати со наставникот или со соучениците за да го подобриш своето разбирање на лекцијата.

Самостојна работа

1. На мапа, растојанието меѓу два града е прикажано како 5 cm. Ако размерот на мапата е $1 : 200000$, колку е вистинското растојание меѓу градовите?
2. Во рецепт за колачи односот на брашното и шеќерот е $3 : 2$. Ако се користат 600 g брашно, колку шеќер е потребно?
3. Должината на играчката автомобил и неговата вистинска должина е во сооднос $1 : 10$. Ако должината на играчката е 45 cm, тогаш колкава е вистинската должина на автомобилот?
4. За да се подготви сок, производителот препорачува да се меша во сооднос $1 : 4$ (една чаша сируп со четири чаши вода). Колку сируп е потребно за да се добијат 2 литри сок?
5. Фотографија со димензии 15 cm и 10 cm треба да се зголеми со ист размер така што нејзината должина да биде 30 cm. Колкава ќе биде ширината на зголемената фотографија?
6. Азра секој месец штеди $\frac{3}{5}$ од својата плата. Ако нејзината плата е 500 евра, колку евра ќе заштеди за еден месец?
7. Големо чоколадо е поделено во сооднос $2 : 3$ помеѓу две деца, Марија и Петар. Ако Марија добила 80 g, тогаш колку чоколадо добил Петар?
8. За да се обои еден ѕид, бојата треба да се меша во размер $3 : 5$ (боја со вода). Ако се користат 3 литри боја, колку литри вода се потребни?
9. Еден автомобил потрошил $\frac{2}{7}$ од резервоарот, односно 14 литри гориво, по изминати 140 km. Колку литри гориво троши автомобилот за 100 km и колкав е вкупниот капацитет на резервоарот?
10. На избори за членови на ученичката заедница двајца кандидати добиле гласови во размер $5 : 8$. Ако вкупниот број на гласови е 1300, тогаш колку гласови добил секој од нив?
11. Ана и Бојан возат велосипеди по различни патеки, но започнуваат во исто време. Ана и Бојан се движат со постојан однос на брзините $3 : 4$, односно Бојан е побрз. Ако Ана помине 18 km за одредено време, колку километри поминал Бојан во истото време?

Примена на правопрпорционалност во реални ситуации

Во секојдневниот живот често се среќаваме со ситуации каде што една величина се менува во ист сооднос со друга. На пример, колку повеќе овошје купуваме, толку повеќе ќе треба да платиме или колку подолго патуваме со иста брзина, толку поголемо растојание ќе поминеме. Овие примери се засноваат на математичкиот концепт на правопрпорционалност.



Во оваа лекција ќе научиш како да препознаеш правопрпорционални врски и како да ги примениш во реални ситуации. Разбирањето на овој концепт ќе ти помогне при решавање различни проблеми во секојдневието, како што се пресметување трошоци, работно време, брзина, густина и многу други практични примери.

Пример 1

Еден двор со должина од 50 метри треба да се подели на два дела во размер $4 : 1$ за садење цвеќиња и трева. Колкава ќе биде должината на секој дел?

Решение:

Размерот $4 : 1$ значи дека вкупниот број на делови е $4 + 1 = 5$. Должината на дворот (50 метри) треба да се подели на 5 еднакви дела.

Еден дел е $50 : 5 = 10$ метри.

Делот за цвеќиња (4 дела) е $4 \cdot 10 = 40$ m, додека делот за трева (1 дел) е $1 \cdot 10 = 10$ m.

Значи, делот за цвеќиња ќе биде 40 метри, а делот за трева 10 метри. Запиши го размерот од добиените должини на деловите со цвеќиња и трева, а потоа упрости го. Што забележуваш?

Задача 1

Јакуп купил букет од 49 цвеќиња, составен од $\frac{3}{7}$ рози и $\frac{2}{7}$ каранфили.

- Колку рози, а колку каранфили има во букетот?
- Во каков размер е бројот на рози и бројот на сите цвеќиња?
- Во каков размер е бројот на каранфилите и бројот на сите цвеќиња?

Пример 2

Софија чита книга со постојана брзина. За 2 часа таа прочитала 60 страници. Колку страници ќе прочита за 5 часа ако продолжи со истото темпо?

Решение:

Се разбира дека за повеќе часови, при исто темпо, Софија ќе прочита повеќе страници од книгата. Бројот на прочитани страници е правопрпорционален со времето што Софија го поминува читајќи.

Пресметуваме колку страници чита за 1 час, $60 : 2 = 30$ страници на час. За 5 часа ќе прочита 5 пати повеќе отколку за 1 h, односно $30 \cdot 5 = 150$ страници.

Ако Софија чита $1\frac{1}{2}$ h, колку страници ќе прочита? Дали во овој случај ќе се намали или ќе се зголеми бројот на прочитани страници?

Пропорционалност е врската меѓу две величини така што едната се менува во одреден однос со другата.

Правопрпорционалност е кога зголемувањето (или намалувањето) на едната величина води до пропорционално зголемување (или намалување) на другата величина.

Задача 2

Материјалот за завеси со должина 8 метри чини 7192 денари. Пресметај колку чинат 15 метри од материјалот.

Пример 3

35 деца патувале со автобус на екскурзија во ботаничка градина. Сите плаќале иста цена за автобуски билет. Вкупната цена за сите 35 деца била 8400 денари. Следниот ден 42 деца решиле да одат на екскурзија. Колку изнесува вкупната цена за 42 деца ако цената за превоз за секое дете останува иста?

Решение:

Ако вкупната цена за 35 деца била 8400 денари, тогаш за едно дете ќе биде $8400 : 35 = 240$ денари. Вкупната цена за 42 деца ќе биде $240 \cdot 42 = 10080$ денари.

Задача 3

Тројца другари од Хрватска пристигнале во Македонија на одмор. Тие размениле неколку хрватски куни (ХРК) за македонски денари (МКД). Сите ги размениле парите за ист курс. Валерија разменила 600 ХРК и добила 4914 МКД.

- а) Карло разменил 900 ХРК. Пресметај колку денари добил Карло?
б) Лана добила 5733 денари. Пресметај колку хрватски куни разменила Лана.

Задача 4

Јана често подготвува палачинки за појадок по дадениот рецепт за своето 4-члено семејство. Еден ден дошле баба ѝ и дедо ѝ на појадок. Запиши по колку ќе ѝ биде потребно од секоја состојка за да направи палачинки за 6 лица.

За 4 лица:
2 јајца, 600 ml млеко,
1 мала лажичка сода бикарбона,
 $\frac{1}{2}$ чаша шеќер и 400 g брашно

Замисли дека планираш патување со велосипед. Доколку знаеш дека движејќи се со постојана брзина можеш да поминеш 24 km за 2 часа, како би го пресметал потребното време за да стигнеш до дестинација од 60 km со истата брзина? Дали можеш да објасниш зошто оваа ситуација е пример за правопрпорционалност?

На крајот од лекцијата размисли за своето разбирање на концептот на правопрпорционалност и оцени се според следните прашања. За секое тврдење избири:

☒ Да | ☐ Делумно | ☒ Не

1. Можам да препознам ситуација од реалниот живот каде што постои правопрпорционалност.
2. Можам да пресметам непозната вредност во правопрпорционална врска.
3. Можам да објаснам со сопствени зборови зошто две величини се во правопрпорционална врска.
4. Умеам да применам правопрпорционалност во различни контексти (трговија, време, патување, готвење и сл.).

Ако имаш повеќе ☒ – одлично ја совладуваш оваа лекција!

Ако имаш повеќе ☐ – повтори ги задачите и побарај помош за нејасните делови.

Ако имаш повеќе ☒ – препрочитај ја лекцијата и вежбај со дополнителни примери.

Предизвик: Смисли пример од секојдневнието каде што можеш да примениш правопрпорционалност и сподели го со соучениците!

Самостојна работа

1. Во маркет 2 килограми портокали чинат 180 денари. Колку чинат 5 kg портокали?
2. Автомобил троши 8 l гориво на секои 100 km.
Колку литри гориво ќе потроши за 250 km?
3. Петар чита 30 страници од книга за 40 минути. Колку време му е потребно за да прочита 75 страници ако чита со истото темпо?
4. Една печатница печати по 500 книги за 4 дена. Колку книги ќе испечати за 10 дена ако брзината на печатење остане иста?
5. Фабрика произведува 2400 маски за 8 часа. Колку маски ќе произведе за 5 часа ако цело време работи со ист интензитет?
6. За бојадисување на 20 m^2 ѕид се потребни 4 l боја. Колку литри боја се потребни за да се бојадисаат 50 m^2 ѕид?
7. Во еден хотел 3 соби чинат 12000 денари за една ноќ. Колку чинат 5 соби за една ноќ ако цената по соба е иста?
8. Рецептот за пица вели дека за да се направи тесто за 4 пици, потребни се 2 чаши брашно. Колку чаши брашно ќе се потребни за да се направат 10 пици ако се користи ист сооднос?
9. Анита се подготвува да прави колачи и за тоа ѝ требаат одредени количини на состојки во зависност од бројот на порции. За 6 порции на колачи, потребни се: 200 g шеќер, 150 g брашно и 2 јајца. Направи табела за да одредиш колку шеќер, брашно и јајца ќе бидат потребни за 3, 9 и 12 порции колачи?

Т Е М А

2

ГЕОМЕТРИЈА



Зборот геометрија потекнува од старогрчките зборови „гео“ што значи земја и „метрија“ што значи мерење. Буквално геометријата означува мерење на земјата. Во старите времиња луѓето ја развиле геометријата за да мерат ниви, да градат патишта, храмови и градби, и да ја разбираат формата на светот околу себе.

Денес, геометријата е една од најстарите, но и најживите гранки на математиката. Таа ни овозможува да ги истражуваме обликот, големината, положбата и односите меѓу различни геометриски фигури, како што се точките, правите, агли, триаголниците, круговите и телата во просторот.

„Нема кралски пат до геометријата.“

Резултати од учењето

По изучувањето на оваа тема ќе бидеш способен/а да:

- ги користиш поимите кружница, круг, кружен лак, заемна положба на кружница и точка, кружница и права, две кружници, во секојдневен контекст;
- решавааш проблеми од секојдневен контекст со користење на поимите точка, права, полуправа и отсечка;
- користиш мерење на агли, мерни единици на агли, централен агол и агли на трансверзала во решавање проблеми од секојдневен контекст;
- ги препознаваш, споредувааш и користиш својствата на 2Д-формите во секојдневни ситуации;
- конструираш триаголник, впишана и опишана кружница кај триаголник при дадени услови;
- користиш осна симетрија, ротација околу дадена точка и транслација при решавање проблеми.

Кружница и круг

Очигледно е дека во секојдневниот живот често се среќаваме со форми кои се поврзани со кружници и кругови – тркалата на велосипедот, часовниците, масите, па дури и патеките на движење на планетите. Во оваа лекција ќе ги повториш и продлабочиш знаењата за кружницата, кругот и нивните заемни положби со точки, прави и други кружници и ќе научиш како овие концепти се користат за решавање практични проблеми.



Пример 1

Во твојата тетратка цртај според следните насоки:

1. Нацртај кружница k :

- Означи го центарот на кружницата со буква, на пример, O .
- Поврзи го центарот на кружницата со една точка од кружницата. Запиши како се вика тоа растојание и означи го со буква.
- Поврзи две точки од кружницата така што добиената отсечка да минува низ центарот на кружницата. Како се вика тоа растојание? Означи го со буква.

2. Додај точки:

- Избери една точка внатре во кружницата и означи ја со M ($\overline{OM} < r$).
- Избери една точка на кружницата и означи ја со A ($\overline{OA} = r$).
- Избери една точка надвор од кружницата и означи ја со P ($\overline{OP} > r$).

3. Нацртај прави:

- Нацртај права a која ја допира кружницата само во една точка T ($a \cap k = \{T\}$).
- Нацртај права c која ја сече кружницата во точките A и B ($c \cap k = \{A, B\}$).
- Нацртај права m која не ја допира кружницата ($m \cap k = \emptyset$).

4. Нацртај друга кружница:

- Нацртај кружница што ја допира првата кружница и означи ја.
 - Нацртај кружница што ја сече првата кружница и означи ја.
 - Нацртај кружница која нема заеднички точки со првата кружница и означи ја.
- Колку решенија има?

Пример 2

Претстави ги различните заемни положби на кружници и прави со геометриски софтвер. Забелешка: Ако немаш пристап до соодветен софтвер за цртање, цртај во твојата тетратка со приборот за геометрија.

Решение:

- а) Прикажи заемна положба на две кружници кои се допираат.
- б) Измери го растојанието меѓу центрите на тие кружници со соодветна алатка од апликацијата и спореди го со збирот од радиусите на двете кружници.
Што забележуваш?
- в) Поместувајќи го центарот на една од кружниците, забележи како се менуваат растојанијата меѓу центрите на кружниците во споредба со збирот од нивните радиуси.

Упатство за работа: Како да го направиш ова со помош на образовен софтвер

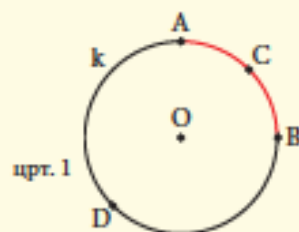
1. Активирај со го образовниот софтвер и избери опција за цртање.
2. Цртање на кружница:
 - Избери алатка за кружница и постави го центарот на кружницата со избор на точка од површината за цртање (избери го центарот рачно ако црташ со прибор).
 - Потоа, во зависност од изборот од паѓачкото мени на алатката за цртање на кружница, заврши ја постапката со цртање на кружницата. Најдобро би било да избереш точка од кружницата со која ќе го определиш нејзиниот радиус.
3. Преместување на точка и мерење растојание:
 - Креирај точка (на пример, точка C) внатре или надвор од кружницата.
 - Преместувај ја точката со соодветната алатка и користи ја алатката мерење на растојание за да видиш како се менува растојанието од точката до центарот на кружницата. Спореди го со радиусот на кружницата. Направи воопштени записи во врска со твоите сознанија.

Пример 3

На кружницата k (O , r) избрани се точките A , B , C и D (црт. 1) На колку дела точките A и B ја делат кружницата?

Решение:

Точките A и B , како што се гледа на цртежот, ја делат кружницата на два дела, едниот кој ја содржи точката C и другиот кој ја содржи точката D .



Делот од кружницата ограничен со две нејзини точки, заедно со тие точки, го нарекуваме **кружен лак**.

Две различни точки од една кружница определуваат два кружни лаца.

За да правиме разлика меѓу двата кружни лаца што ги определуваат две различни точки од една кружница, за нивно означување ќе користиме три големи букви: неговите две гранични точки и една точка од кружницата со која е определен тој кружен лак.

Двата кружни лаца од црт. 1 ги обележуваме со $\widehat{ACB}$ и $\widehat{ADB}$.

Задача 1

Дадени се две кружници k_1 (O_1 , 4 cm) и k_2 (O_2 , 3 cm). Во каква заемна положба се двете кружници ако растојанието меѓу нивните центри е:

а) $\overline{O_1O_2} = 7$ cm

б) $\overline{O_1O_2} = 5$ cm

в) $\overline{O_1O_2} = 9$ cm

Објасни го твојот одговор.

Задача 2

Нацртај кружница со радиус од 35 mm, а потоа обележи кружен лак што одговара на тетива со должина: а) 40 mm, б) 3 cm, в) еднаква на дијаметарот на таа кружница.

Пример 4:

Во еден парк треба да се постават две кружни фонтани. Едната фонтана е со радиус од 5 метри, а другата со радиус од 7 метри. На кое растојание може да бидат центрите на овие фонтани за:

а) двете фонтани да се надвор една од друга

б) двете фонтани да се допираат однадвор

в) помалата фонтана да е во поголемата фонтана и да ја допира однатре.

Решение:

а) Ако растојанието на центрите на фонтаните го означиме со c , тогаш за двете фонтани да се надвор една од друга, треба $c > r_1 + r_2$, односно растојанието меѓу центрите на фонтаните да биде поголемо од збирот на радиусите на двете кружници. Нацртај!

- б) За да се допираат однадвор двете фонтани, растојанието меѓу центрите на фонтаните треба да биде еднакво со збирот на радиусите на фонтаните, односно $c = r_1 + r_2$. Нацртај!
- в) За помалата фонтана да е во поголемата фонтана и да ја допира однатре, треба растојанието меѓу центрите на фонтаните да е еднакво на разликата меѓу радиусите на фонтаните, односно $c = r_2 - r_1$, каде што $r_1 < r_2$ (црт. 2).



Задача 3

Тркалото на велосипедот има радиус од 35 cm.

- Нацртај ја кружницата која го претставува тркалото на велосипедот и на неа обележи го центарот на кружницата. Во твојата тетратка радиусот нека е 3,5 cm. (потсети се за размер)
- Измери ја должината на дијаметарот на велосипедот. А колку е вистинската големина?
- Нацртај го радиусот на тркалото од велосипедот и означи го со буква.
- Во каква заемна положба се внатрешниот и надворешниот раб на гумата?

Во еден град два радио-телевизиски предаватели се поставени на одредена далечина еден од друг. Првиот предавател има антенска површина што создава сигнал со радиус од 3 километри, додека вториот предавател создава сигнал со радиус од 4 километри. Двата предаватели се поставени на растојание од 5 километри еден од друг.

- Одреди дали има совпаѓање на сигнални области, односно на сигналите од двата предаватели?
- За подобар прием, не би требало да има совпаѓање и мешање на сигналите од двата предаватели. На кое растојание може да се постават предавателите за да има прием без мешање на сигналите?

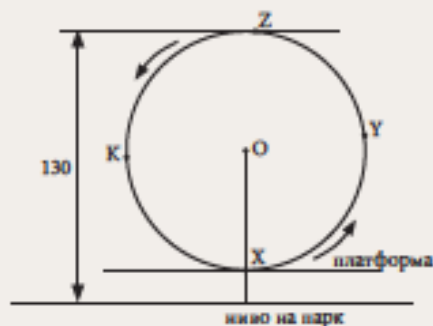
Одговори во тетратка. За тврдењата на кои одговорот е ДА - наведи пример, а за тврдењата за кои одговорот е НЕ врати се на примерите и задачите кои се однесуваат на овие тврдења.

- Можам да идентификувам точка како внатрешна точка во кружница, надворешна точка на кружницата или точка на кружницата. ДА/НЕ
- Можам да одредам дали правата ја допира или ја сече кружницата. ДА/НЕ
- Можам да одредам заемна положба на две кружници. ДА/НЕ
- Можам да објаснам што е кружен лак. ДА/НЕ
- Можам да означам кружен лак на дадена кружница. ДА/НЕ

Самостојна работа

1. Нацртај кружница $k(O, r)$. Нацртај и означи радиус $\overline{OA}$ и дијаметар $\overline{AB}$ на нацртаната кружница. Кои од тврдењата се точни?
а) Радиусот е половина од дијаметарот. б) Дијаметарот е поголем од радиусот.
в) Дијаметарот е еднаков на радиусот. г) Радиусот е двојно поголем од дијаметарот.
2. Нацртај $k(O, 6 \text{ cm})$. Нацртај тетива $\overline{BC}$ со должина 8 cm. Измери и одговори колку е растојанието од центарот на кружницата до тетивата?
а) Растојанието е 4 cm. б) Растојанието е 6 cm.
в) Растојанието е 8 cm. г) Растојанието е 4,5 cm.
3. Точката А се наоѓа на 6 cm од центарот О на кружницата со радиус од 5 cm. Што од следното е точно за положбата на точката А?
а) Точката А се наоѓа на кружницата.
б) Точката А се наоѓа внатре во кружницата.
в) Точката А се наоѓа надвор од кружницата.
г) Точката А е на дијаметарот на кружницата.
4. Две кружници имаат центри во точките О и Р. Првата кружница има радиус од 5 cm, а втората има радиус од 7 cm. Каква ќе биде заемната положба на овие две кружници ако растојанието меѓу нивните центри е 12 cm?
а) Кружниците ќе се допираат еднадвор. б) Кружниците ќе се сечат.
в) Кружниците ќе бидат една во друга. г) Кружниците ќе се допираат однатре.
5. Две погонски тркала имаат различни радиуси и растојание меѓу центрите 50 cm. Радиусот на едното тркало е 15 cm, а на другото е 25 cm.
а) Нацртај ја кружницата на секое од двете тркала. (користи размер).
б) Во каква заемна положба се кружниците? Објасни зошто.
6. Нацртај $k(O, 4 \text{ cm})$, потоа нацртај радиус $\overline{OM}$, тетива $\overline{MN}$ и означи го поголемиот кружен лак што одговара на таа тетива. На крај повлечи дијаметар чии крајни точки се две точки од означениот кружен лак.
7. Нацртај две паралелни прави и кружница која ги допира двете прави. Колкав радиус има добиената кружница? Која е врска на радиусот на кружницата со растојанието меѓу двете прави?
8. На шанк во ресторан кој има форма на правоаголник со димензии 2 dm и 2 m треба да се наредат чинии со кружна форма чии дијаметри се 5 dm, 1 dm, 1,5 dm, 2 dm. Колку најмногу чинии може да се наредат по должината на шанкот ако треба да се стави најмалку по една чинија од секоја големина?

9. Марко и Ана се наоѓаат во парк и секој од нив има свој круг за играње. Кругот на Марко има радиус од 5 метри, а кругот на Ана има радиус од 3 метри. Центрите на двата круга се оддалечени 6 метри еден од друг.
- Дали круговите на Марко и Ана се сечат?
Направи цртеж во размер за да одговориш на прашањето.
 - Ако центарот на кругот на Ана се помести за 2 метри поблиску до центарот на кругот на Марко, дали круговите ќе се преклопуваат повеќе или помалку? Објасни.
10. Во дворот на Бети има кружна цветна леа со радиус од 8 метри. Патека минува низ дворот и е на растојание од 6 метри од центарот на цветната леа. За да ѝ помогнеш на Бети при уредувањето на дворот, одговори на прашањата и поткрепи го твоето објаснување со цртеж (користи ги твоите предзнаења за размер).
- Дали патеката ја сече кружницата на леата? Ако е така, колкава е должината на делот од патеката што минува низ леата?
 - Дали патеката ќе ја сече кружницата на цветната леа ако се помести за 2 метри подалеку од центарот на леата? Објасни го твојот одговор.
 - Дали патеката ќе ја сече кружницата на цветната леа ако се помести за 2 метри поблиску до центарот на леата? Објасни го твојот одговор.
11. Нацртај кружница k ($O, 3 \text{ cm}$), а потоа нацртај радиус $\overline{OM}$, дијаметар $\overline{MN}$, тетива $\overline{AB}$ и лак $\widehat{ACB}$.
12. Во центарот на градскиот парк се издигнува спектакуларно тркало кое нуди прекрасен поглед на околината (види цртеж).
- Дијаметарот на тркалото изнесува 120 m.
 - Највисоката точка на тркалото е на 130 m над нивото на паркот.
 - Тркалото ротира во насока што ја покажуваат стрелките.
- Точката O на цртежот го претставува центарот на тркалото. На која висина (во метри) над нивото на паркот се наоѓа точката O ?
 - Тркалото се движи со постојана брзина и за еден целосен круг му се потребни 50 минути. Мила се качува во кабината на почетната позиција X и започнува со возење. Каде ќе се наоѓа Мила по 25 минути?
А. Во точката Y Б. Меѓу точките Y и Z В. Во точката Z Г. Меѓу точките Z и X
 - Колкава е должината на патот што ќе го помине кабината на Мила за 25 минути, ако должината на кружницата при едно цело завртување е 377 m? Како се вика делот од кружницата што ќе го помине Мила?



Тангента на кружница

Тангентата е еден од најинтересните поими во геометријата. Секојдневно ја среќаваме во архитектурата, транспортот и технологијата. Во оваа лекција ќе научиш што е тангентата на кружница, како да ја препознаеш, правилно да ја нацрташ и да научиш како може тангентата да се примени при решавање задачи во реален контекст.



Пример 1

На сликата е прикажан мост што се протега над река. Неговата главна носечка конструкција има форма на кружен лак. Над тој лак се наоѓа права платформа по која можат да се движат возила или пешаци.



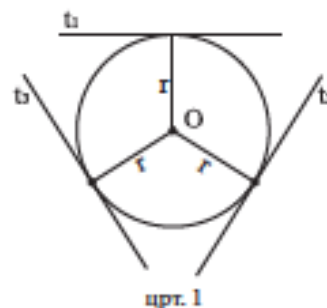
- Во каква заемна положба се наоѓаат кружниот лак на мостот и правата платформа што се протега по неговата горна страна?
- Замисли дека носечката конструкција е дел од цел круг. Дали можеш да најдеш сличност со некоја положба меѓу кружница и права која сте ја учеле на часовите по математика?

Тангентата на кружница е права која има една заедничка точка со кружницата, наречена точка на допир.

Пример 2

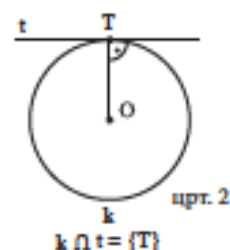
Во твојата тетратка нацртај кружница со произволен радиус и центар O . Потоа нацртај барем 2 различни прави кои се на растојание од центарот на кружницата што е еднакво на радиусот на твојата кружница (црт 1).

- Каква заемна положба зафаќа секоја од нацртаните прави со кружницата?
- За секоја тангента поврзи ја точката на допир со центарот на кружницата. Измери го аголот што го зафаќа секоја тангента со радиусот добиен со поврзување на нејзината допирна точка со центарот на кружницата. Што можеш да заклучиш од твоето истражување?



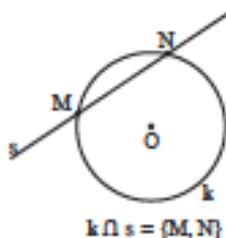
- в) Нацртај кружница $k(O, r)$ и радиус $\overline{OT}$ каде што T е произволна точка од кружницата. Нацртај тангента на кружницата што минува низ точката T .

Тангента на кружница е нормална на радиусот на кружницата кој го поврзува центарот на кружницата со нејзината точка на допир.



Пример 3

На кружницата $k(O, r)$ избери 2 точки M и N низ кои ќе минува секанта за таа кружница.



Правата што ја сече кружницата во две точки се вика секанта.

Задача 1

Во еден град се планира изградба на нов плоштад. На плоштадот ќе има голема фонтана во форма на кружница. Радиусот на фонтаната е 8 метри. Планирано е да се постави патека која ќе биде тангента на кружницата на фонтаната.

- На кое растојание е патеката од центарот на фонтаната?
- Направи цртеж. Како ќе ја нацрташ патеката? При цртањето користи размер.

Пример 4

Во еден парк постои голема цветна леа со кружна форма. Треба да се постави декоративен камен во една точка P која е надвор од кружницата на цветната леа. Потоа се планира да се постави патека која ќе минува преку декоративниот камен и ќе ја допира цветната леа на едно место. Како да се нацрта патеката која ќе поминува низ точката P (декоративен камен) и ќе биде тангента на леата? Кој е точниот метод за цртање на оваа патека, користејќи само триаголник и линијар?

Решение:

- Прво, нацртај ја цветната леа (кружницата) со центарот во точката O и радиус r .
- Означи ја точката P (декоративен камен) надвор од кружницата.
- Со триаголник и линијар нацртај тангента која ќе поминува низ точката P и ќе ја допира кружницата во точка T . Колку такви патеки може да се постават? Како ќе провериш дали е прецизно нацртана патеката која минува низ декоративниот камен и ја допира фонтаната?

Од дадена точка надвор од кружницата може да се повлечат точно две тангенти до кружницата.

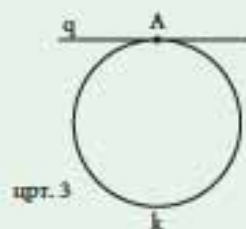
Во оваа лекција се очекува да нацрташ цртеж со помош на линијар.

Пример 5

Патека за возила е проектирана како кружница со радиус од 50 m. Заштитната ограда за оваа патека треба да е права која ќе ја допира патеката на точно одредено место. Претстави ги патеката и заштитната ограда со цртеж.

Решение:

Со цртежот е претставена кружницата (кружната патека) и заштитната ограда која ја допира патеката во точката A.



Задача 2

При изградба на скејт-полигон со кружна форма со радиус од 10 m, на растојание од 25 m од центарот на таа кружница е поставен патоказ. Од патоказот до скејт-полигонот се планирани две патеки кои ќе ја допираат кружницата на скејт-полигонот. Колкави се должините на тие патеки? Упатство: Користи размер, претстави ја ситуацијата со цртеж, а потоа со мерење одреди ја должината на тие патеки.

- 1) Која е разликата при цртање тангента на кружница кога треба да ја повлечеш:
 - а) низ точка од кружницата
 - б) низ точка надвор од кружницата.Претстави ги двата случаи со цртеж.
- 2) Колкаво е растојанието од центарот на кружницата до заедничката/ите точка/и со тангентата (секантата) споредено со радиусот на таа кружница?

Одговори ги прашањата во твојата тетратка.

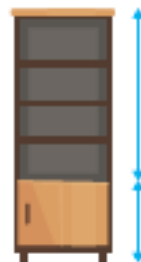
- Дали можам да препознаам тангентата на кружница? ДА/НЕ
 - Дали можам да нацртам тангентата од дадена точка? ДА/НЕ
 - Дали можам да применим тангенти во практични ситуации? ДА/НЕ
- Објасни го твојот одговор.

Самостојна работа

- Во парк во форма на круг со радиус од 30 метри се планира да се постават светилки на 5 метри од работ (кружницата) на паркот. Која од следниве должини го претставува радиусот на кружницата што ја прават светилките?
 - 25 метри
 - 35 метри
 - 30 метри
 - 20 метри
- На кружна велосипедска патека со дијаметар од 30 метри треба да се изгради излез кој ќе биде допирна точка со друга права патека. Колкаво е растојанието од центарот на кружната патека до излезот?
 - 0 метри
 - 15 метри
 - 30 метри
 - 20 метри
 - Кое својство на тангентата ќе помогне во дизајнот на патеката од излезот на патеката?
 - Ако должината на радиусот на велосипедската патека е зголемена на 20 метри, дали излезот на велосипедската патека останува допирната точка на патеката што треба да се направи?
- Фонтана во парк има форма на кружница со радиус од 12 метри. Почнувајќи од точка А која е на 15 метри од центарот на кружницата треба да се постави патека која ќе биде нејзина тангентата.
 - Која од следниве должини е еднаква на растојанието од центарот на кружницата до допирната точка на тангентата и кружницата?
 - 10 m
 - 12 m
 - 15 m
 - 20 m
 - Која од следниве должини е еднаква на растојанието од точката А до допирната точка на тангентата и кружницата? Користи цртеж во размер.
 - 5 m
 - 8 m
 - 9 m
 - 10 m

Графичко собирање и одземање отсечки

Собирањето и одземањето на отсечки е основен дел од геометријата кој се користи во многу практични ситуации. Во оваа лекција ќе научиш како да собираш и одземаш отсечки со користење шестар. Дополнително, ќе научиш да разликуваш колинеарни точки и како да конструираш отсечка со должина еднаква на дадена отсечка. Оваа техника ќе ти овозможи прецизно да конструираш должини и да ги примениш знаењата во различни ситуации.



Пример 1

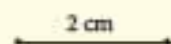
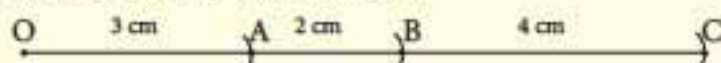
Томислав сака да оди од дома до своето училиште, но на патот има две станици каде што мора да застане, а тоа се: станица А и станица В.

- Растојанието од неговиот дом до станицата А е 3 km.
 - Растојанието од станицата А до станицата В е 2 km.
 - Растојанието од станицата В до училиштето е 4 km.
- а) Нацртај отсечки што го претставуваат патот од домот на Томислав до училиштето, преку станиците А и В.
- б) Пресметај го вкупното растојание (графички и аритметички) што Томислав треба да го помине за да стигне до училиштето.
- в) Ако Томислав го поминал патот од домот до станицата А, уште колку километри пат треба да помине до училиштето?

Решение:

а) Во кој размер се нацртани растојанијата?

б) $3 \text{ km} + 2 \text{ km} + 4 \text{ km} = 9 \text{ km}$. Томислав треба да помине 9 km за да стигне до училиштето.



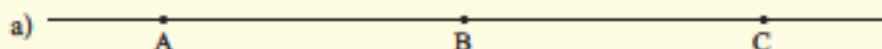
в) $9 \text{ km} - 3 \text{ km} = 6 \text{ km}$. Ако Томислав го поминал патот од домот до станицата А, тогаш до училиштето му останале уште 6 km.

Пример 2

Еден инженер треба да постави светилки за осветлување патека во парк. Патека е права линија, а инженерот планира да постави три светилки на одредени позиции.

- Светилката А треба да се постави лево на патеката.
 - Светилката В треба да се постави на средина помеѓу А и С.
 - Светилката С треба да се постави десно на патеката.
- а) Нацртај права што ја претставува патеката и обележи ги точките А, В и С.
- б) Провери дали светилките А, В и С се на иста права.
- в) Ако растојанието од А до В е 5 метри, пресметај го растојанието од А до С.

Решение:



б) Точките А, В и С се на иста права.

За точките што лежат на една права се вели дека се колинеарни точки.

- в) Растојанието од точката А до точката С (ако точките А, В и С се колинеарни и точката В е помеѓу точките А и С) е збирот на растојанијата од точката А до точката В и од точката В до точката С: $5\text{ m} + 5\text{ m} = 10\text{ m}$. Растојанието од точката А до точката С е 10 метри, односно $AC = 10\text{ m}$.

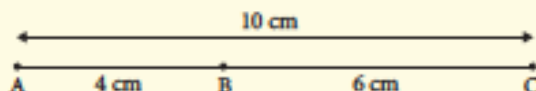
Пример 3

Дали точките А, В и С се колинеарни ако:

- а) $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, $\overline{AC} = 10\text{ cm}$, $\overline{AB} = 4\text{ cm}$ б) $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{AC} = 12\text{ cm}$, $\overline{AB} = 10\text{ cm}$

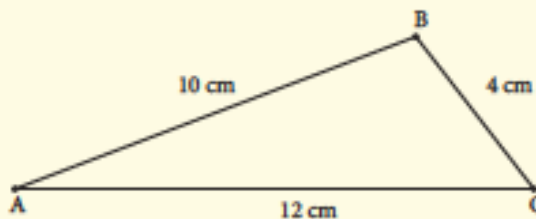
Решение:

- а) Ако графички ги собереме отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, ќе ја добиеме отсечката $\overline{AC}$, односно $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Тоа е прикажано и со цртежот



Точките А, В и С се колинеарни.

- б) Во овој случај ниту едно од растојанијата не можеш да го претставиш како збир на другите две растојанија, па точките А, В и С не се колинеарни. $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$



За кои било три точки М, N и Р, важи: Растојанието од точката М до Р не е поголемо од збирот на растојанијата од М до N и од N до Р, односно $\overline{MP} \leq \overline{MN} + \overline{NP}$.

Пример 4

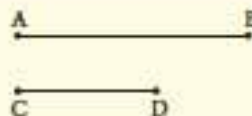
Јана има две градини во форма на квадрати со различни должини на страната. По мерењето на должините на страните утврдила дека:

- Првата градина има страна $\overline{AB} = 5\text{ m}$.
- Втората градина има страна $\overline{CD} = 3\text{ m}$.

Јана сака да ги спои овие две должини во една, но исто така сака да знае колку е подолга страната $\overline{AB}$ од страната $\overline{CD}$.

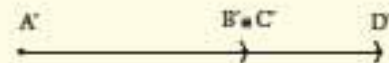
Решение:

а) Со линијар цртаме отсечки $\overline{AB} = 5\text{ m}$ и $\overline{CD} = 3\text{ m}$.



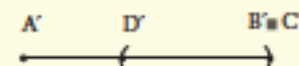
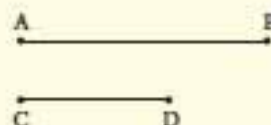
б) За да можеш и ти да ја конструираш отсечката на збирот на отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, работи и ти како Јана:

- Со шестар измери ја должината на отсечката $\overline{AB}$.
- Пренеси ја таа должина на полуправата што ќе ја нацрташ, обележувајќи ја како $A'B'$ (притоа точката A' се поставува како почетна точка на полуправата).
- Со шестарот измери ја должината на $\overline{CD}$.
- Пренеси ја таа должина со почеток во B' (иглата на шестарот се поставува во B' , се добива $B' \equiv C'$). Потоа со другиот дел од шестарот - моливот исцртуваме кружен лак на полуправата обележувајќи ја новата точка како D').
- Новата отсечка $\overline{A'D'}$ ќе има должина еднаква на збирот на должините на отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, $A'D' = AB + CD$.



в) За да конструира отсечка со должина еднаква на разликата на должините на отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, Јана ги прави следните чекори, а следи ги и работи како неа и ти:

- Нацртај полуправа и одбери почетна точка A' .
- Со шестар измери ја должината на отсечката $\overline{AB}$.
- Пренеси ја таа должина на полуправата, обележувајќи ја како $A'B'$.
- Со шестар измери ја должината на отсечката $\overline{CD}$.
- Постави ја иглата на шестарот на точката B' и исцртај лак на отсечката $A'B'$, но со моливот на шестарот кон точката A' ($B' \equiv C'$).
- Точката каде што лакот ја сече отсечката $A'B'$ обележи ја како D' .
- Новата отсечка $\overline{A'D'}$ ќе има должина еднаква на разликата на должините на отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, односно $A'D' = AB - CD$.



Задача 1

Даден е правоаголник со должини на страни 2 cm и 3 cm. Графички определи го периметарот на правоаголникот.

Задача 2

Ана планира да купи две парчиња мебел за својата дневна соба:

- Еден тресед со должина $\overline{AB} = 2\text{ m}$.
- Една фотелја со должина $\overline{CD} = 1,5\text{ m}$.

а) Во размер, нацртај отсечки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ кои ги претставуваат должините на мебелот.

- б) Конструирај нова отсечка чија должина е вкупната должина на мебелот (троседот и фотелјата).
- в) Ако должината на сидот во дневната соба е 5 m, дали ќе остане простор на сидот ако Ана ги постави двете парчиња мебел на истиот сид, едно до друго.
- г) Ако должината на најдолгиот сид е 5 m, а Ана на таа страна од просторијата го постави само троседот, колкава должина останува за некое друго парче мебел?

Задача 3

Давид има цветна леа во форма на правоаголник. Должината на едната страна е $\overline{AB} = 4$ m, а должината на другата страна е $\overline{CD} = 3$ m.

- а) Во размер, нацртај ги отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, кои ги претставуваат страните на леата.
- б) Конструирај нова отсечка чија должина е вкупната должина на отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.
- в) Определи конструктивно - колку вкупно метри ограда ќе му требаат на Давид ако постави ограда околу целата леа? (Вклучи ги сите четири страни).



Како точното мерење и одредување на должината на отсечките може да влијае врз процесот на дизајнирање мебел или претставување растојанија на мапа? Објасни зошто е важно да се користат точни мерни алатки, како што се линијар или шестар, и како тоа може да ги подобри резултатите во реални ситуации, како што се изработка на мебел или мерење растојанија.

Запиши ги одговорите во твојата тетратка. За тоа што не си сигурен во твоите знаења, врати се на тие делови од лекцијата.

- Мојам ли да собирам и одземам отсечки со шестар?
- Дали ја разбираам разликата помеѓу графичкото и аритметичкото собирање и одземање на отсечки?
- Како мојам да го применим ова знаење во практични ситуации?

Самостојна работа

Во некои од задачите има потреба од користење размер.

1. На една улица има простор за паркирање автомобили. Должината на паркингот е 24 метри, а должината на еден автомобил е 4 метри. Ако меѓу два автомобили треба да има минимално растојание од 1 метар, графички прикажи како ќе изгледа распоредот на автомобилите и пресметај колку автомобили може да се паркираат на паркингот.
2. Покрај прав автопат се ставени три столба во точките М, N и Р. Растојанијата меѓу столбовите се: $\overline{MP} = 5 \text{ km}$, $\overline{MN} = 7 \text{ km}$. Колкаво е растојанието меѓу столбовите во точките N и Р ако:
а) столбот Р е меѓу столбовите М и N б) столбот М е меѓу столбовите N и Р
3. Мирко планира да изгради ограда околу својот двор. Дворот има форма на правоаголник со должина од 8 метри и ширина од 5 метри.
а) Графички определи ја вкупната должина на оградата на дворот.
б) Ако една панел-ограда која ќе се користи за оградување е долга 6,5 метри, графички прикажи колку панели ќе бидат потребни за да се изгради целата ограда.
4. Еден инженер планира да изгради мост кој ќе се состои од два дела:
 - Првиот дел има должина еднаква на 4,2 m.
 - Вториот дел има должина еднаква на 3,8 m.а) Нацртај ги отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, кои ги претставуваат должините на деловите.
б) Конструирај нова отсечка која ја претставува вкупната должина на мостот.
в) Ако инженерот реши да го скрати мостот за 2 m, конструирај нова отсечка која ја претставува скратената должина на мостот.
5. Јасна сака да изгради патека во својот двор која ќе биде права линија. Патеката почетно треба да има должина од 10 m, но ќе биде потребно од едната страна да се отстрани еден дел од патеката за да се постави влез во дворот. Должината на влезот ќе биде 4 m. Со конструкција определи колкава ќе биде новата должина на патеката.
6. Лена има лента која има вкупна должина од $\overline{AB} = 12 \text{ dm}$. Таа сака да ја користи за украсување на две полица во својот дом. Должината на лентата што ќе биде потребна за украсување на секоја полица е $\overline{CD} = 5 \text{ dm}$.
а) Нацртај отсечка $\overline{AB}$ која ја претставува вкупната должина на лентата и отсечка $\overline{CD}$ за должината на една полица.
б) Со помош на шестар, конструирај нова отсечка која ќе ја претставува преостанатата должина на лентата.
в) Определи колку сантиметри лента ќе останат по украсувањето на двете полица.

Конструкција на паралелни и нормални прави. Симетрала на отсечка

Со оваа лекција ќе научиш како да конструираш паралелни и нормални прави, како и конструкција на симетрала на отсечка. Овие концепти се многу важни за разбирање на геометриските својства на правите и отсечките и ќе ти помогнат да решаваш различни геометриски задачи.

Со овие знаења ќе можеш да работиш со различни геометриски конструкции и ќе добиеш нови вештини кои ќе ти помогнат при решавање посложени геометриски проблеми.



Пример 1

Марко сака да нацрта улица која е паралелна на постојна улица и друга улица која ја сече постојната улица под прав агол. Исто така, треба да постави семафор на средината на пешачкиот премин.

- Со помош на геометриски прибор, нацртај една права и потоа нацртај друга права што е паралелна со првата.
- Нацртај друга права што е нормална на првата.
- Дадена е отсечка што го претставува пешачкиот премин. Нацртај ја симетралата на оваа отсечка за да ја означиш средината каде што ќе биде поставен семафорот.

Решение:

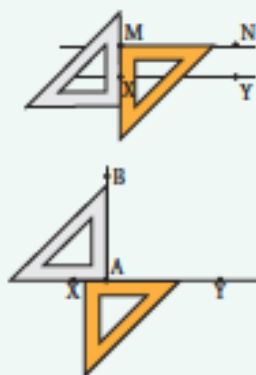
- Користејќи линијар, нацртај една права.

За да нацрташ паралелна права, постави го триаголникот линијар покрај другиот триаголен линијар и лизгај го нагоре или надолу додека не ја добиеш паралелната права.

- За нормална права, користи го правиот агол од триаголникот линијар така што едната негова страна да биде поставена на првата права, а другата да биде нормална на неа.

- За да ја нацрташ симетралата на отсечката, следи ги овие чекори:

- Постави го линијарот на отсечката и измери ја должината на отсечката.
- Подели ја должината на половина и означи ја средишната точка на отсечката.
- Постави го линијарот така што едната негова страна да биде на отсечката, а другата да поминува низ средишната точка под прав агол.
- Нацртај ја нормалната права што ја сече отсечката на половина – ова е нејзината симетрала.



Пример 2

На прозорец треба да се постават две украсни лајсни како на сликата. Тие треба да се поставени така што едната да минува низ средината и да биде поставена под прав агол на другата лајсна. Помогни му на мајсторот правилно да ги постави лајсните.

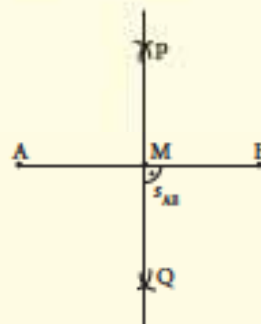
За да ја искористиме математиката при решавањето на овој реален проблем, ние ќе ги користиме шестарот и предзнаењата за симетрала на отсечка.



Решение:

Чекори за конструкција на лајсните со помош на шестар:

- Со линијар нацртај ја хоризонталната лајсна како отсечка со определена должина (на пример, 4 cm).
- Означи ги крајните точки на отсечката и именувај ги како A и B.
- Постави го врвот на шестарот во точката A и отвори го на повеќе од половина од должината на отсечката.
- Нацртај лак нагоре и надолу од двете страни на отсечката.
- Без да го менуваш отворот на шестарот, повтори го истото од точката B, така што двата пара лацци ќе се пресечат. Означи ги пресечните точки на лаците горе и долу со точки P и Q, соодветно.
- Поврзи ги точките P и Q каде што се сечат лаците со линијар.
- Оваа права ја дели отсечката AB на два еднакви дела и е нормална на неа. Таа е симетралата на AB, ознака s_{AB} .
- Означи ја точката на средината како M.



Оваа лајсна е нормална на првата, што значи дека формира агол од 90° со неа.

Со овие чекори мајсторот ќе може правилно да ги постави лајсните на прозорецот!

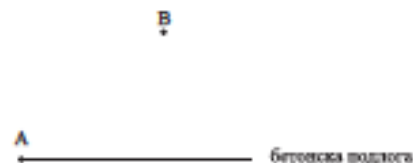
Задача 1

Прецртај ги отсечките во твојата тетратка и конструирај ги нивните симетрали.



Пример 3

На градилиште треба да се постават два столба нормални на бетонската подлога (плоча) која е веќе направена. Притоа, за едниот се знае во која точка од основата треба да се постави, а за другиот на кое растојание од плочата треба да стои. Како инженер на градилиштето, имаш задача да направиш конструкција со која ќе ги прикажеш двата столба.



Решение:

Чекори за конструкција на двата столба:

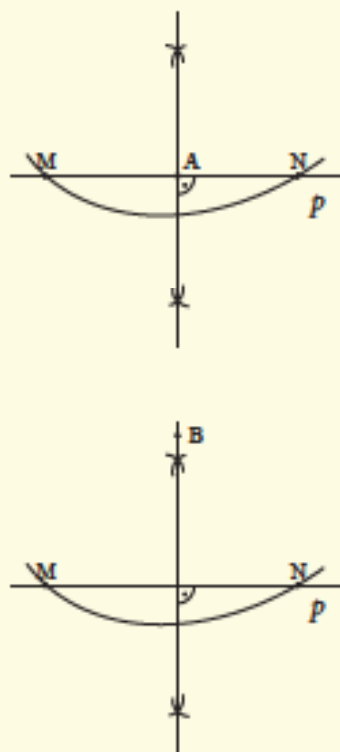
I. Конструкција на столб во дадена точка на бетонската подлога (конструкција на нормала на права низ дадена точка што лежи на таа права). Ова се чекорите на конструкција:

- Со линијар нацртај хоризонтална права p , која ја претставува бетонската подлога.
- Избери точка A на правата p и означи ја како местоположба на првиот столб.
- Постави го врвот на шестарот во точката A и со цртање на кружен лак означи две точки M и N на подлогата, една налево и една надесно од A .
- Постави го врвот на шестарот во точката M и нацртај лак нагоре и надолу.
- Без да го менуваш отворот на шестарот, повтори го истото од точката N , така што двата лаци ќе се сечат.

Спој ја точката A со местото каде што се сечат лациите – оваа права е нормална на подлогата и го претставува првиот столб.

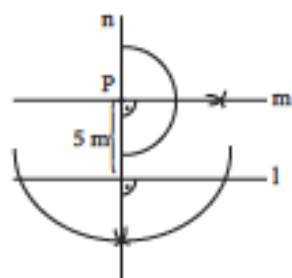
II. Конструкција на вториот столб што минува низ точка надвор од бетонската подлога:

Овој случај е пак конструкција на нормала на права низ точка што не лежи на правата. Искористи го понудениот цртеж според кој ќе ги запишеш чекорите во твојата тетратка и ќе ја направиш бараната конструкција.



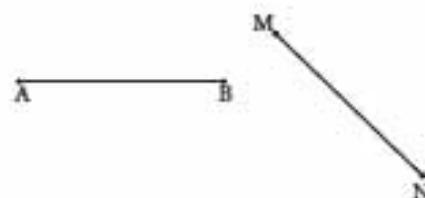
Пример 4

За подобро хортикултурно уредување, дворното место треба да се подели на неколку дела со повлекување паралелни прави кои се на растојание од 5 метри една од друга. Значи, дадени се правата l и точката P што е на растојание 5 m од l . Твоја задача е да конструираш права $m \parallel l$ која минува низ P . Искористи го дадениот цртеж, запиши ги чекорите на конструкцијата и направи ја во твојата тетратка.



Задача 2

Прецртај ги отсечките во твојата тетратка. Низ точката S што е пресечна точка на симетралите на отсечките AB и MN , конструирај права p што е нормална на правата AM и права q што е паралелна со правата BN .



Пример 5:

На една улица треба да се постави нова автобуска постојка. Платформата на постојката треба да биде нормална на работ на тротоарот, а покривната конструкција треба да биде паралелна со него. Како инженер, имаш задача да направиш точна конструкција за правилно поставување на платформата и покривот.

- Конструирај ја платформата како отсечка нормална на работ на тротоарот.
- Конструирај права која ќе биде паралелна со работ на тротоарот и ќе ја претставува покривната конструкција.

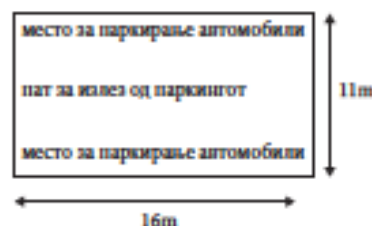
Решение:

Чекори за конструкција:

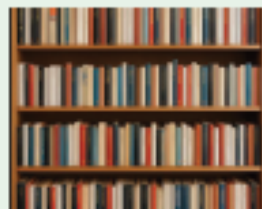
- Нацртај ја правата p , која го претставува работ на тротоарот.
- Избери точка A на оваа права каде што ќе биде поставена платформата.
- Со шестар:
- Означи две точки B и C на правата p , на еднакво растојание од A .
- Постави го врвот на шестарот во точката B и со радиус поголем од половината на отсечката BC и направи лак нагоре.
- Потоа постави го шестарот во точката C со ист радиус и направи друг лак што се сече со првиот.
- Означи ја точката на пресек како D и поврзи ја со A . Добиената отсечка AD е нормална на p и ја претставува платформата.
- За покривната конструкција:
- Избери точка E низ која ќе биде поставен покривот.
- Користејќи шестар, конструирај права q паралелна на p која минува низ E .
- Оваа права q ја претставува покривната конструкција.

Задача 3

На цртежот е претставен паркинг-простор на кој треба да се исцртаат паралелни линии со кои ќе се означат паркинг-местата за автомобилите. Тие треба да се наредени во два реда и да се остави простор меѓу редовите за излез од паркингот. Исцртај ги линиите на паркинг-просторот и определи колку најмногу автомобили собира овој паркинг ако просторот за еден автомобил треба да има форма на правоаголник со димензии 4 m на 2 m. (Димензиите на паркингот се 16 со 11 метри, а излезот е три метри на страната од паркингот со должина 11 метри).



Како би можел да ги користиш паралелните и нормалните прави, како и симетралата на отсечка во секојдневни ситуации, на пример, во архитектурата, дизајнот на мебел или дури и во сликарството? Објасни како овие конструкции може да ти помогнат да создадеш прецизни и уредни конструкции.

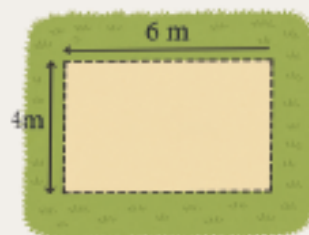


Одговори во твојата тетратка. За тоа што не си сигурен повторно врати се на тие делови од лекцијата.

1. Колку добро ги разбираам основните геометриски поими, како што се паралелни и нормални прави, и симетрала на отсечка и нивно конструирање?
2. Дали успевам да ги користам овие конструкции во задачи поврзани со дизајн, архитектура или секојдневни ситуации?
3. Која конструкција ми беше најтешка за разбирање и зошто?
4. Која конструкција ми беше најлесна и како ја применував?
5. Дали се чувствувам подготвен да ги применим овие геометриски концепти во нови задачи или предизвици?

Самостојна работа

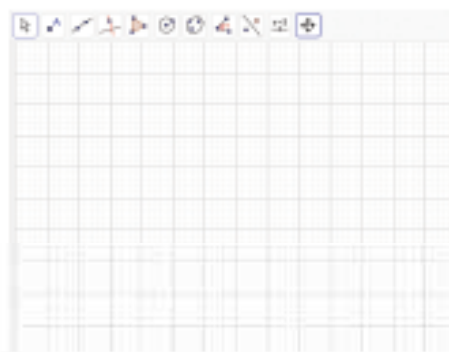
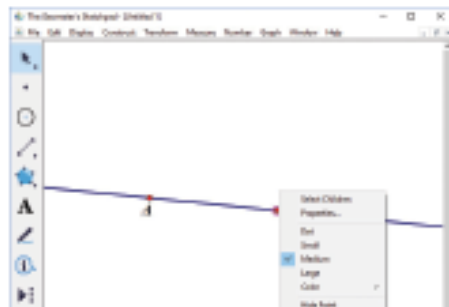
1. Паралелно со дадена улица од иста страна треба да поставиш две паралелни патеки за пешаци. (користи размер)
 - а) Конструирај ги двете паралелни патеки користејќи шестар, така што првата патека да биде на растојание од 3 метри од улицата, а втората на растојание од 6 метри од првата патека.
 - б) Одреди го растојанието меѓу улицата и втората патека.
2. Во проектот за уредување дворна површина имаш задача да поставиш цветна градина која ќе биде нормална на патеката за пешаци во дворот.
 - а) Избери точка на главната патека од која ќе започнеш да ја градиш цветната градина.
 - б) Конструирај нормална права од таа точка која ќе ја пресече главната патека и по таа права ќе биде цветната градина.
3. Дадени се две точки на растојание од 8 cm една од друга. Најди ја средишната точка меѓу овие две точки со конструкција на симетрала.
4. Во проектот за изградба на патека треба да конструираш две паралелни прави кои ќе ги претставуваат долната и горната страна на патеката. Ширината на патеката е 2 m. Потоа треба да конструираш нормална патека на првата кај која растојанието меѓу левата и десната страна (ширината) на патеката е 2,5 m.
5. Парк има форма на правоаголник со димензии 6 m и 4 m. Во проектот за планирање патеки во паркот треба да поставиш две патеки. Првата патека треба да биде поставена паралелно со должината на паркот на растојание од 1 m и со должина 8 m. Втората патека треба да биде нормална на првата и да ја дели на два еднакви дела.



Конструкција на геометриски елементи со образовен софтвер

Во оваа лекција ќе се запознаеш со важен аспект на геометријата — конструкцијата на геометриски елементи, но со помош на современ образовен софтвер. Користењето дигитални алатки за цртање и конструирање во геометриски задачи значително го олеснува процесот на учење, давајќи ни можност да ги визуализираме и испитаме геометриските конструкции на поедноставен и поинтерактивен начин.

Целта на оваа лекција не е само да ги развиеш техничките вештини за работа со софтвер, туку и да го подобриш твоето разбирање на основните геометриски концепти. Со помош на интерактивните алатки ќе станеш посигурен и поефикасен во решавањето геометриски проблеми. Софтверите како GeoGebra, Geometer's Sketchpad и други слични алатки овозможуваат динамична интеракција со геометриските објекти и ја прават математиката поразбирлива и поблиска до реалниот живот. Геометриските софтвери се користат за точно и брзо извршување геометриски конструкции, што ќе ти користи во понатамошното учење на геометрија, како и во секојдневните задачи кои вклучуваат планирање, дизајн и анализа.



Пример 1

Во една фабрика за играчки се прават различни компоненти за играчки. Твоја задача е да нацрташ дел од играчка кој треба да има правоаголна форма со страни 6 cm и 4 cm.

Решение:

За да ја направиш оваа конструкција, ќе треба да користиш повеќе геометриски конструкции.

1. Конструкција на отсечка еднаква на дадена отсечка: Започни со задавањето на една отсечка (страна) на играчката со должина од 6 cm. Твоја задача е да нацрташ отсечка со должина еднаква на дадената отсечка (AB).
2. Конструкција на нормални прави: Низ крајните точки на отсечката конструирај две нормални прави.
3. Обележи две точки C и D на секоја од добиените нормали по една на растојание 4 cm од крајните точки на првата отсечка (B, A).
4. Поврзи ги четирите точки за да го формираш правоаголникот. Размисли и запиши ги чекорите на конструкција ако прво го користиш својството на паралелни страни на правоаголникот.



Пример 2

Користи ги алатките на образовниот софтвер за да конструираш отсечка еднаква на дадена отсечка, симетрала на отсечката и паралелни и нормални прави.

Решение:

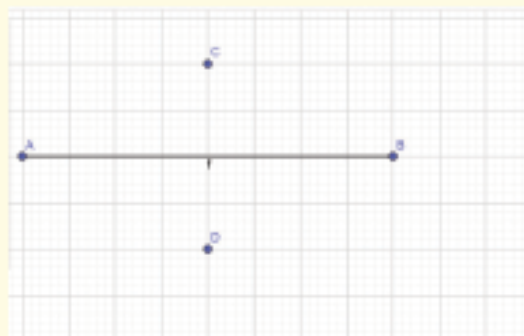
- Конструкција на отсечка еднаква на дадена отсечка:
Избери една отсечка и користи ја алатката за копирање за да конструираш втора еднаква отсечка.
- Конструкција на симетрала: Избери соодветна алатка од менито и креирај симетрала на отсечката.
- Конструкција на паралелни и нормални прави:
Соодветните алатки ти овозможуваат да креираш прави кои се паралелни или нормални на дадена права.

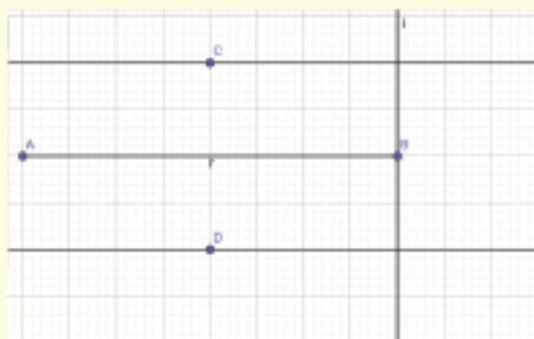
Пример 3

Користи образовен софтвер за цртање пешачки премин на улица.

1. Нацртај права која ја претставува улицата: започни со цртање на една отсечка која ќе ја претставува средишната линија на улицата.
2. Користи паралелни линии за да ги означеш рабовите на преминот: нацртај две паралелни линии од секоја страна на отсечката која ја претставува улицата. Овие линии ќе ги означуваат рабовите на пешачкиот премин.
3. Користи нормални линии за да ги означеш „зебрите“ на преминот: нацртај нормални прави на паралелните прави кои ќе ги претставуваат линиите на „зебрите“ на пешачкиот премин.

Решение:





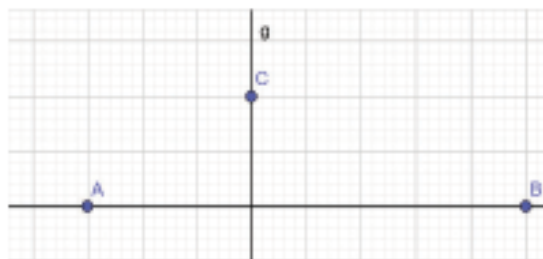
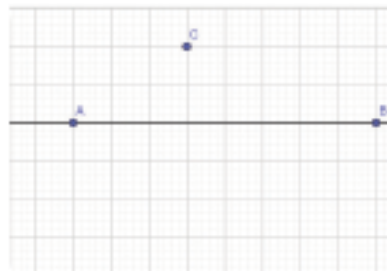
Пример 4

Работиш на план за изградба на мост. Твојот мост треба да има заштитна ограда.

- Нацртај отсечка која го претставува мостот.
- Користи симетрала за да го поделиш мостот на два еднакви дела.
- Додај паралелни линии за да ги означиш страните на мостот.
- Нацртај прави нормални на мостот кои ќе ги претставуваат столбовите што го држат мостот.

Користи образовен софтвер за оваа задача.

Упатство: На сликите е прикажана постапката на цртање на нормална права на АВ во точка С што не лежи на правата АВ.



Нацртај план за нов јавен простор/објект (парк, мост или улица). Користи образовен софтвер за:

- Конструкција на отсечки кои ќе ја претставуваат главната структура.
- Користи симетрали, паралелни и нормални прави за да ги дизајнираш деталите. Обиди се и со други алатки на образовниот софтвер за да го претставиш просторот.

Потоа, одговори на следниве прашања:

- Кои чекори беа најлесни, а кои најтешки за конструкција?
- Како ти помогна образовниот софтвер да бидеш поточен?
- Што би направил поинаку следниот пат?

Оцени се себеси со помош на оваа скала:

- Јасно го разбираам концептот на отсечка и симетрала.
- Знам да конструирам паралелни и нормални прави со софтвер.
- Мојам самостојно да применам геометриски конструкции во реални ситуации.

Самостојна работа

Доколку имаш можност, решавај ги задачите со користење на геометриски софтвер, во спротивно решавај во твојата тетратка (користи размер).

1. Во паркот има патека долга 6 m. Треба да се направи друга патека која минува низ средината на првата и е нормална на неа.
2. Дадена е права и точка што не лежи на неа. Низ дадената точка конструирај права паралелна на дадената.
3. а) Нацртај правоаголник кој ја претставува основата на тениско игралиште во дворот.
б) Нацртај ги двете дијагонали на правоаголникот и обележи ги.
в) Конструирај симетрала на едната дијагонала. Каде минува симетралата? Што можеш да кажеш за дијагоналите на правоаголникот?
4. Две пешачки патеки треба да се вкрстат под прав агол во дадена точка од едната патека. Претстави ја конструкцијата за оваа ситуација во твојата тетратка.
5. Прозорец има форма на квадрат. Повлечи ја едната дијагонала на квадратот. Низ средишната точка на дијагоналата конструирај права нормална на дијагоналата.
а) Низ кои точки минува правата нормална на дијагоналата?
б) Што можеш да кажеш за правата нормална на дијагоналата?

- Градина во форма на правоаголник треба да се подели на два еднакви дела. Која геометријска конструкција ќе ја користиш? На колку начини може да се подели?
- Два моста треба да бидат паралелни и да поминуваат низ две дадени точки. Конструирај паралелни линии кои минуваат низ две дадени точки за да ја прикажеш ситуацијата.
- Во парк со правоаголна форма (9 m и 6 m) треба да се постават патеки така што едни ќе бидат распоредени паралелно на ширината на правоаголникот на секои 3 m, а други нормални на ширината на правоаголникот на секои 2 m. Конструирај ги патеките. Објасни кои се заемно паралелни, а кои заемно нормални патеки. Зошто?

Основни поими за агли и полурамнини

Во секојдневниот живот често се среќаваме со форми, линии и агли – од дизајнот на прозорците и вратите во нашите домови до кривулистите патеки во парковите. За да ги разбереме и користиме овие појави, важно е да ги знаеме основните геометријски поими, како што се полурамнините и аглите.



Во оваа лекција ќе ги научиш поимите полурамнина, конвексни и неконвексни агли и како да ги применуваш во секојдневни ситуации, при дизајнирање простори и решавање проблеми.

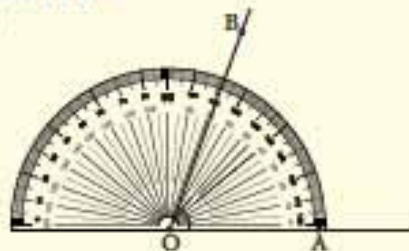
Пример 1

Ана поставува соларен панел во својот двор. За да добие најдобар агол за примање на сончевата светлина, панелот треба да се постави под агол од точно 69° . Таа нацртала агол на хартија, но не знае како да ги означи неговите елементи за да го измери и провери дали е точен. За да ѝ помогнеш на Ана:

- Нацртај агол со агломер од 69° .
- Именувај ги елементите на аголот (темето и краците).

Решение:

а)



- б) Теме на аголот е O . На секој крак избери по една точка и именувај ги, на едниот крак на пример со A , а на другиот крак со B (краци на аголот се OA и OB).

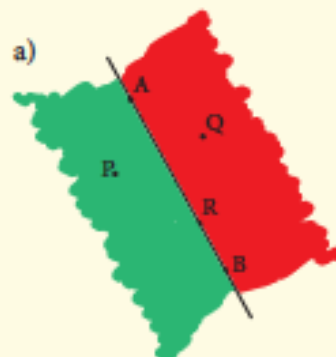
Пример 2

Во паркот се гради пат кој треба да го дели паркот на два дела – дел со цветни леи и дел со тревник. Инженерите започнале да го означуваат патот со права линија AB .

- а) Означи ги со различни обојувања деловите од двете страни на правата AB .
б) Одреди и запиши кои точки од рамнината на паркот ѝ припаѓаат на едната страна, а кои на другата страна на правата.
в) Со зборови опиши што претставува поимот „полурамнина“.

Решение:

- б) Точката P е на зелениот дел од рамнината, односно од левата страна на правата AB . Точката Q е на делот од рамнината обоен со црвено, односно од десната страна на правата AB . И точката R е на правата AB .
в) Полурамнина е дел од рамнината кој е ограничен со една права и ги содржи сите точки од едната страна на правата, заедно со самата права.



Сите точки од една рамнина што се на иста страна од дадена права во рамнината заедно со таа права образуваат 2Д-форма која се нарекува полурамнина. За правата m велиме дека е гранична права или раб на таа рамнина.

Задача 1

Замисли дека стаклото на прозорецот или површината на вратата е рамнина. Ако поставиш линија која го дели стаклото или вратата на два дела, кои делови се полурамнини?

Пример 3

На цртежот се дадени два агли.

- Кој агол е помал, а кој поголем од 180° ?
- Прецртај ги аглиите во твојата тетратка и означи го секој агол.
- Избери точки на краците од секој агол и поврзи ги.
- Што можеш да кажеш за отсечката што ја доби во секој агол чии крајни точки се точки од краците на тој агол?



Решение:

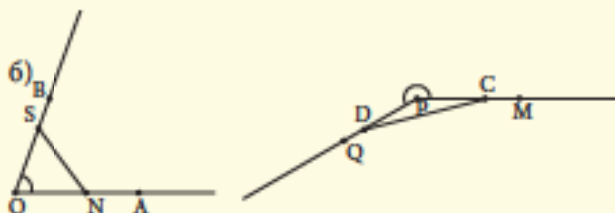
- $\angle AOB = 70^\circ$ помал од 180° .
 $\angle MPQ = 210^\circ$ е поголем од 180° .

- Отсечката NS е таква што нејзините крајни точки се точки од краците и таа лежи целосно во $\angle AOB$.

Отсечката CD е таква што нејзините

крајни точки се точки од краците на аголот, но таа не лежи во $\angle MPQ$.

Заклучуваме дека аглиите $\angle AOB$ и $\angle MPQ$ се разликуваат.



За еден агол велиме дека е конвексен ако секоја отсечка чии крајни точки се точки од краците на тој агол целосно лежи во тој агол.

Поимот конвексен агол е специјален случај од поопштите поими за конвексна форма.

Една рамнинска геометрирска форма F (подмножество точки од рамнината) се нарекува конвексна форма ако за секои две точки M и N од F , отсечката MN целосно лежи во формата F , односно отсечката MN е подмножество од формата F .

Задача 2

Објасни зошто правите, полуправите, отсечките, рамнината, полурамнината се конвексни форми?

Задача 3

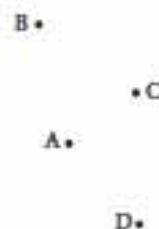
Каков агол формираат стрелките на часовникот ако:

- покажуваат 3:00 часот?
- покажуваат 10:10 часот?

Пример 4

Четворица од играчите на кошаркарски тим се поставени на теренот како на цртежот. Помогнете му на тренерот да одреди:

- Дали играчот во точката D е во иста полурамнина со играчот C во однос на правата која се формира од позициите на играчите A и B?
- Дали со оваа поставеност на играчите A, B и C се формира конвексен или неконвексен агол со теме во B што ја содржи точката D?



Решение:

Направи цртеж во твојата тетратка според дадените насоки.

- Ако ја повлечеш правата AB, очигледно е дека точките C и D се на иста страна од неа, односно лежат во иста полурамнина.
- Ако ги нацрташ полуправите BA и BC, се добиваат два агли со теме во точката B, такви што едниот е конвексен (тоа е аголот чија внатрешна точка е точката D) и другиот е неконвексен (а за него точката D е надворешна точка). Именувај го секој од аглите.

Задача 4

Три клупи во дворот на училиштето се поставени во темињата на замислен триаголник ABC.

- Дали клупата во точката C е во иста полурамнина со клупата A во однос на правата која се формира од позициите на клупите A и B?
- Дали со оваа поставеност на клупите A, B и C се формира конвексна или неконвексна 2D-форма?

Задача 5

Градината е поделена со патека што оди од точка P(2,1) до точката Q(6,5). Цветна леа е поставена на точката R(4,3). Одговори на следните прашања:

- На која од полурамнините определени со правата PQ припаѓа точката R?
- Дали аголот $\angle PRQ$ е конвексен или неконвексен?

Задача 6

Направи свој дизајн на градина. Постави патеки по свој избор кои се сечат под различни агли. Цртај на хартија или користи образовен софтвер за да ги означиш аглите помеѓу патеките. Класифицирај ги добиените агли како конвексни или неконвексни.

Оцени го својот одговор според следните критериуми:

- Идентификувани се сите агли.
- Точно се класифицирани како конвексни или неконвексни.
- Објаснето е зошто секој агол припаѓа на соодветната категорија.

Зошто е важно да разликуваш конвексни од неконвексни агли во реалниот живот? Кои примери од секојдневието најмногу ти помогнаа да ги разбереш полурамнините и аглите?

Во твојата тетратка одговори со ДА или НЕ на следните тврдења:

1. Мојам да препознаам и именувам агли и полурамнини.
2. Разликувам остар, прав, тап и рамен агол.
3. Мојам да класифицирам агли како конвексни или неконвексни.
4. Мојам правилно да нацртам и да означам агли и полурамнини.
5. Успешно решавам задачи поврзани со агли и полурамнини.

Ако имаш повеќе „НЕ“ одговори, повтори ги деловите што ти се нејасни.

Самостојна работа

1. Градот е поделен на два дела со река која поминува низ него. Реката ја претставува правата АВ, каде што $A(2,2)$ и $B(6,2)$. Паркот се наоѓа во точката $C(4,4)$, а училиштето се наоѓа во точката $D(4,1)$.
 - а) Дали паркот и училиштето се во иста полурамнина која е определена со правата АВ?
 - б) Кои од точките се на иста страна од реката: $E(5,5)$, $F(1,1)$ и $G(3,7)$?
2. Во еден парк има три патеки кои се сечат во точките $A(3,2)$, $B(6,4)$ и $C(5,6)$. Трите патеки формираат триаголник ABC.
 - а) Нацртај ги трите патеки и обележи го аголот $\angle ABC$.
 - б) Дали аголот $\angle ABC$, за кој точката $(5,4)$ е внатрешна точка, е конвексен или неконвексен? Објасни зошто!
3. Дворот на една кука е поделен со патека која во координатниот систем минува низ точките $A(1,5)$ и $B(4,3)$. Во дворот се наоѓаат: фонтана на точка $F(3,5)$, цвекарник на точка $G(2,1)$ и скара на точка $H(4,7)$.
 - а) Нацртај ја правата АВ и обележи ги точките F, G и H.
 - б) Кои од точките F, G и H се на иста страна од патеката?
 - в) Која од точките е најоддалечена од патеката?
4. На спортски терен е поставен фудбалски гол со точки $A(1,3)$ и $B(5,3)$. Играч се наоѓа на точка $C(4,6)$, а топката е на точка $D(2,5)$.
 - а) Нацртај ја правата АВ што го претставува голот и точките C и D.
 - б) Дали аголот ACD со надворешна точка B е конвексен или неконвексен?
 - в) Која од точките $C(4,6)$ или $D(2,5)$ е поблиску до правата АВ?

5. Нацртај патека за трчање што го дели паркот на две полурамнини. Патеката почнува од точката A(1,3) и оди до точката B(5,3). Во паркот е поставена уметничка скулптура во точката C(3,6). Одговори на следните прашања:

- Во која полурамнина дефинирана од правата AB припаѓа точката C?
- Дали аголот $\angle ACB$, за кој координатниот почеток е внатрешна точка, е конвексен или неконвексен?

Мерење, проценување и цртање агли

Во секојдневниот живот често се сретнуваме со ситуации каде што треба да процениме големина на агол. На пример, архитектите во својата работа мора точно да одредат дали аголот на покривот е остар, тап или неконвексен за да се обезбеди стабилност и функционалност.

Во оваа лекција ќе научиш:

- Како да разликуваш и измериш остри, тапи и неконвексни агли до најблискиот степен.
- Како да ги процениш големините на аглите до најблиската десетка.
- Како овие знаења да ги примениш во реални ситуации.

Пример 1

Во паркот се планира да се изградат патеки што формираат агли околу фонтана. Тие се поставени на следниот начин:

- Патека AB и BC се сечат во точката B и формираат $\angle ABC$ од 50° .
- Патека BC и CD се сечат во точката C и формираат $\angle BCD$ од 90° .
- Патека CD и DA се сечат во точката D и формираат $\angle CDA$ од 120° .
- Патека DA и AB се сечат во точката A и формираат $\angle DAB$ од 100° .

а) Одреди кои агли се остри, прави, тапи или неконвексни.

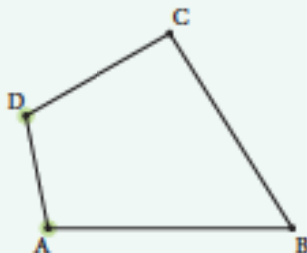
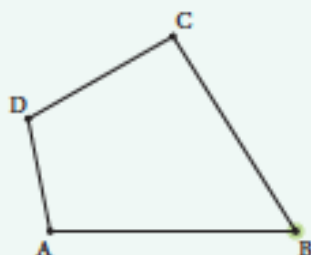
в) Нацртај го планот на патеките и обележи ги аглите.

г) Замисли дека во паркот треба да се постават светилки во секој агол:

- Ако треба да се постават светилки само во темињата на остри агли, на кои точки ќе ги поставиш?
- Ако треба да се постават светилки кај сите агли што се поголеми од 90° , тогаш на кои точки ќе ги поставиш?

Решение:

г)



Пример 2

Нацрт-планот за дневниот престој на еден стан предвидува прецизно проектирање, односно треба да се измери и нацрта секој агол меѓу сидовите до најблискиот степен.

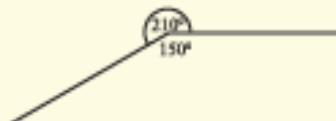
Архитектот ги одредил следните агли:

- Аголот меѓу северниот и источниот сид изнесува 65° .
- Аголот меѓу јужниот сид и таванот е 120° .
- Аголот меѓу западниот и јужниот сид е 210° .

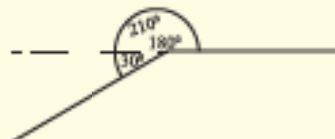
- Нацртај ги овие агли во твојата тетратка со користење агломер.
- Опреди кој од нив е остар, прав, тап и неконвексен агол.
- Дополнително објасни како аголот од 90° да се користи за проверка на аглиите од 65° и 120° .

Решение:

а) Цртање агли:



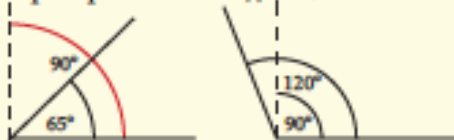
За 210° користено е мерење на дополнителниот агол ($360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$)



или како втора опција $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.

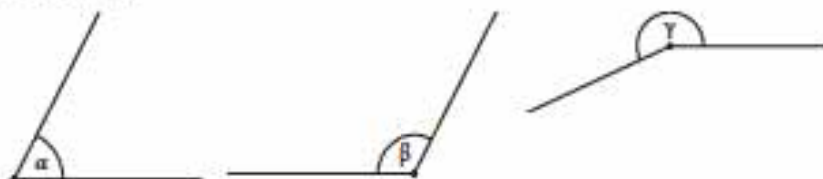
б) Класификација на агли:

- 65° е остар агол (помал од 90°)
- 120° е тап агол (помеѓу 90° и 180°)
- 210° е неконвексен агол (поголем од 180°)

в) Проверка со агол од 90° :

Пример 3

Архитектот Марко дизајнира нова соба и нацртал неколку агли меѓу видовите. Потребно е да се процени големината на овие агли до најблискиот степен изразен со цели десетки за да се изработи точен план.



а) Прецртај ја табелата во тетратката.

Агол	Проценета големина на аголот	Големина на аголот со мерење со агломер
α		
β		
γ		

Процени ја големината на секој агол до најблискиот степен изразен со цели десетки. Внеси ја проценетата големина на секој агол.

б) Кој од аглите е остар, тап или неконвексен?

в) Направи цртежи во кои ќе ги прикажеш аглите со проценетите вредности.

Проценување на агли

За да процениш агол без агломер, користи визуелна споредба, на пример:

- Агол од 45° е половина од прав агол (90°).
- Агол од 135° е тап агол што е приближно во средината меѓу 90° и 180° .
- Неконвексен агол, на пример агол од 240° има соодветен кружен лак што е речиси цела кружница со мал дел што недостасува.

Решение:

а) Процена на агли:

За α : блиску до 60°

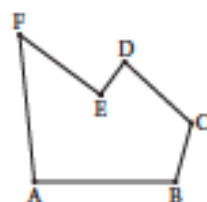
За β : блиску до 120° .

За γ : блиску до 210° .

б) Првиот агол од 60° е остар агол (помал од 90°), вториот агол е тап (помеѓу 90° и 180°), додека третиот агол 210° е неконвексен агол (тој е поголем од 180°).

Задача 1

Користи агломер и на цртежот измери еден остар, еден тап и еден неконвексен агол, а потоа нацртај ги тие агли во твојата тетратка.



Задача 2

Процени ја големината на секој агол до најблискиот степен во цели десетки. За секој агол, запиши твоја процена и спореди ја со вистинската големина на аголот.



Задача 3

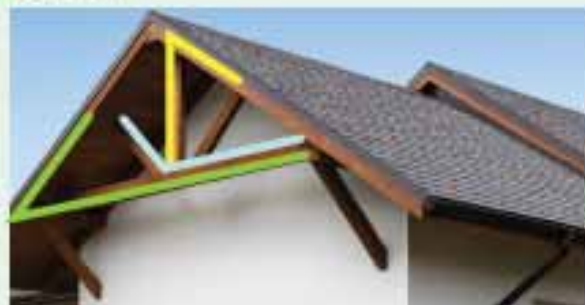
Од сликата процени ги аглите. Дали се приближно 30° , 90° или 150° ?



Пример 4

Нацртај проста скица на дел од објект (куќа, покрив, зграда...) со различни агли. Означи ги аглите кои се 60° , 120° и 180° .

Решение:





Задача 4

Нацртај орнамент кој ќе содржи конвексни и неконвексни агли, а потоа обој ги острите агли со црвена боја, тапите со жолта и неконвексните агли со виолетова боја. На крај измери по еден агол од секој вид и запиши ја неговата големина.



Задача 5

Направи список со пет предмети во твојот дом (на пример, рамки, садови, маси, прозорци). За секој предмет:

- Процени еден агол.
- Измери го аголот со агломер.
- Забележи колкава е разликата помеѓу процената и мерењето.

Како би објаснил што е неконвексен агол? Креирај скица, на пример, мост или парк, каде што ќе користиш најмалку три вида агли (остри, тапи и неконвексни). Објасни зошто си ги избрал тие агли. Направи процена, а потоа провери ја точноста на твоите проценени од претходното прашање. Колку блиску си до реалните мерења?

За да го процениш своето знаење, обиди се да одговориш во твојата тетратка на следните предизвици:

Прашање 1: Нацртај неколку агли и процени ги без користење агломер. Потоа измери ги и спореди ја твојата процена со точните вредности. Колку беше блиску?

Прашање 2: Дали триаголник може да биде неконвексна 2Д-форма? Објасни!

Прашање 3: Ако еден агол е 130° :

а) Колку му недостига до 180° ? б) Колку му недостига до 360° ?

Прашање 4: Во кои секојдневни ситуации би можел/а да го користиш знаењето за мерење агли? Наведи барем три примери.

Ако точно одговори на сите прашања 🚀

Ако одговори на 3-4 прашања, продолжи да вежбаш! 💡

Ако одговори на 1-2 прашања, наврати се на лекцијата и да вежбаш уште малку! ✖

Предизвик: Обиди се да создадеш своја загатка или задача поврзана со мерење агли и сподели ја со другите!

Самостојна работа

1. Нацртај агол што е поголем од 90° и помал од 180° без агломер. Процени ја неговата големина, запиши ја. Потоа измери го аголот со агломер до најблискиот степен и напиши ја неговата големина. Колку е разликата меѓу големината на аголот и процената?



Прецртај ја табелата во твојата тетратка и пополни ја.

Агол	Процена	Мерење	Разлика меѓу проценка и мерење
Агол 1			
Агол 2			
Агол 3			

3. Нацртај агол од 50° и агол од 130° без агломер. Секој агол измери го. Колкава грешка си направил при цртањето без агломер?

Централен агол

Дали имаш забележано дека брзинометарот на твојот велосипед, часовникот на ѕидот или дизајнот на тркалото имаат форми што вклучуваат кругови и агли? Во оваа лекција ќе научиш како да црташ, означуваш и користиш централни агли за да решаваш различни проблеми.

Пример 1

Јана сака да направи украс за роденденска забава. Таа ќе користи кружен лак за да направи интересен украс на таванот од нејзината соба.

Дизајн на украсот:

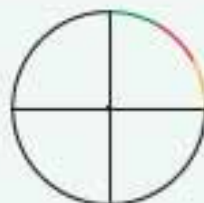
- Јана има три ленти: црвена, зелена и жолта.
- Таа сака секоја лента да покрива еден дел од кружен лак кој е $\frac{1}{4}$ од целата кружница.
- Деловите од кружниот лак покриени со различни ленти да бидат еднакви.



- а) Колкав дел од лакот ќе се покрие со секоја од лентите?
 б) Дали ќе има некој дел од лакот што ќе биде без лента?
 Ако одговорот е да, колкав е тој дел?

Решение:

- а) Лакот е $\frac{1}{4}$ од кружницата. Јана има три ленти (црвена, зелена и жолта) и секоја од нив ќе покрива еднаква должина од кружниот лак. Бидејќи имаме три ленти, секоја лента ќе покрие $\frac{1}{3}$ од лакот.
 б) Ако секоја лента покрива $\frac{1}{3}$ од кружниот лак (го гледаш како едно цело), а има три ленти, тогаш овие три ленти ќе покријат заедно $\frac{3}{3}$, односно целиот кружен лак. Значи, целиот кружен лак ќе биде покриен со лентите и нема да остане празен дел.



Пример 2

Марко и Ана работат заедно на еден проект. Тие сакаат да направат интересен цртеж на еден ѕид во нивното училиште користејќи кружница и неколку прави кои ќе се сечат во нејзиниот центар. Притоа кружницата ја делат на три еднакви дела и секој дел го обојуваат со различна боја. Марко и Ана работеле по следните чекори:

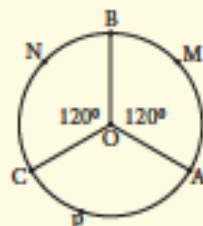
- Марко нацртал кружница со центар во точка О.
- Ана ја поврзала точката О со точка А од кружницата.
- Марко го поставил агломерот во центарот О на кружницата и полуправата која ја нацртала Ана и измерил агол од 120° . Зошто? Потоа го повлекол вториот крак од аголот и пресекот со кружницата го означил со В. Меѓу точките А и В на кружницата означил точка М.
- Ана почнувајќи од кракот ОВ на аголот АОВ со агломер измерила агол од 120° и го повлекла вториот крак од вториот агол. Пресекот на вториот крак од вториот агол со кружницата го означила со С. Меѓу В и С избрала точка N.
- Меѓу точките С и А на кружницата Марко избрал точка Р.

- а) Според чекорите што ги следеле Марко и Ана цртај во твојата тетратка.
 б) Дали кружницата е поделена на три дела?
 в) Именувај ги добиените лаци!
 г) Запиши го секој агол чие теме е во центарот на кружницата и соодветен на еден од кружните лаци $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
 д) Прецртај ја табелата во тетратката и пополни ја.

Кружен лак	Централен агол	Тетива

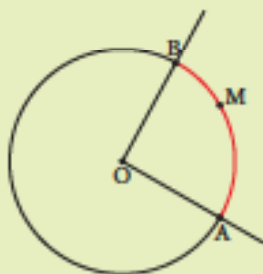
Решение:

- а) Цртежот што го добиле Марко и Ана е даден на цртежот.
- б) Кругницата е поделена на три еднакви дела. Објасни зошто.
- в) Добиели се лаците $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
- г) $\angle AOB$ со теме во центарот на кругницата и неговите краци го отсекуваат лакот $\widehat{AMB}$,
 $\angle BOC$ со теме во центарот на кругницата и неговите краци го отсекуваат лакот $\widehat{BNC}$,
 $\angle AOC$ со теме во центарот на кругницата и неговите краци го отсекуваат лакот $\widehat{CPA}$.



Аголот чије теме е центарот O на кругницата и отсекува лак $\widehat{AMB}$ од таа кругница се нарекува централен агол над лакот $\widehat{AMB}$.

Секој лак од една кругница определува единствен централен агол над тој лак.



- д) Според примерот, дополни ја табелата во твојата тетратка.

Круген лак	Централен агол	Тетива
	$\angle AOB$	AB
	$\angle BOC$	
	$\angle AOC$	

Секој централен агол во една кругница определува единствена тетива од таа кругница.

Пример 3

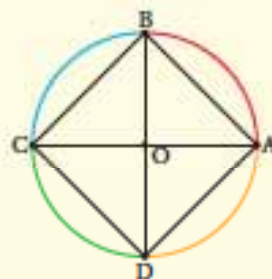
Група ученици сакале да го уредат училишниот двор со цвекник поделен на 4 еднакви дела. За да им помогнеш, следи ги следните чекори:

- Нацртај кружница и подели ја на четвртини. Што забележуваш за деловите? Каков централен агол е формиран над секој од четирите лаца?
- Поврзи ги соседните точки на кружницата со тетиви. Колку тетиви може да нацрташ? Дали на секоја тетива се формира агол во центарот? Каков агол е тој?
- Избери една тетива и набљудувај ја кружницата. На колку дела тетивата ја дели кружницата? Дали секоја тетива определува еден централен агол? Опиши ги тие агли. Дали тетивата одговара на секој од двата кружни лаца? Како можеш да ја потврдиш таа врска?
- Дали можеш да заклучиш што одредува секој централен агол во кружницата? Како е поврзана тетивата со централните агли што ги определува? Како можеш да докажеш дека секој централен агол одредува единствен кружен лак?

Решение:

- Секој дел од кружницата е еднаков бидејќи кружницата е поделена на четири еднакви лаца. Секој централен агол над еден лак изнесува 90° бидејќи полниот агол од кружницата (360°) е поделен на четири еднакви дела.
- Може да нацрташ четири тетиви кои ги поврзуваат соседните точки на кружницата. Секоја тетива формира централен агол во центарот на кружницата.
- Една тетива ја дели кружницата на два лаца – еден поголем и еден помал. Да, секоја тетива определува два централни агли. Едниот централен агол е над поголемиот лак, а другиот е над помалиот лак. Тетивата лежи во еден од двата агли. Ова може да се потврди така што ќе се измери аголот што одговара на помалиот кружен лак над таа тетива, односно конвексниот агол. Преостанатиот дел од кружницата, односно поголемиот кружен лак одговара на неконвексен агол кој изнесува 360° – конвексниот агол.
- Секој лак од една кружница определува единствен централен агол над тој лак.

Тетивата ги поврзува крајните точки на лакот, а централните агли се формираат врз основа на тие крајни точки и центарот на кружницата.



Секој централен агол од една кружница определува единствена тетива од таа кружница.

Задача 1

Со точките M и N кружницата е поделена на два кружни лаца, од кои едниот е 7 пати подолг од другиот. Одреди го централниот агол кој одговара на пократкиот кружен лак.

Задача 2

Една кружница со точките P и Q е поделена на два дела, од кои едниот е $\frac{4}{9}$ од кружницата. Одреди го централниот агол кој одговара на кружниот лак со поголема должина.

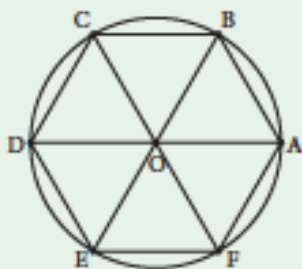
Пример 4

Во градскиот парк планираат да направат кружна цветна леа. Работниците одлучиле да ја поделат кружницата на шест еднакви дела за да засадат различни видови цвеќиња.

- Нацртај кружница и означи ги точките A, B, C, D, E, F со кои кружницата е поделена на шест еднакви дела.
- Нацртај централни агли што одговараат на секој од шесте дела. Колкав е секој централен агол?
- Ако тетивите што ги поврзуваат соседните точки на кружницата се еднакви, дали кружните лаца што тие ги опфаќаат се еднакви? Објасни.

Решение:

Користи го цртежот и одговори ги прашањата.

**Задача 3**

Колкав дел од кружницата одговара на централен агол од:

- а) 120° б) 90° в) 240° г) 270° д) 40°

Како централните агли, тетивите и кружните лаца се поврзани во кружницата и како оваа поврзаност може да ни помогне да решиме проблеми во секојдневниот живот?

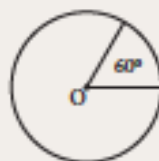
Ако се дадени две кружници со различни радиуси, дали централните агли од 90° ги опфаќаат истите должини на кружните лаца? Објасни зошто.

Одговори на прашањата во твојата тетратка. Сподели ги одговорите со соучениците.

- Што научив денес што ми беше најинтересно или најкорисно?
- Дали има ситуации во реалниот живот каде што сум забележал или би можел да применувам вакви геометриски концепти?
- Дали можам да нацртам централен агол со агломер?
- Дали можам да објаснам како кружните лаци и тетивите се поврзани со централните агли?
- Што би направил различно ако повторно решавам некоја од задачите во оваа лекција?

Самостојна работа

1. Нацртај кружница која ќе претставува часовник.
 - а) Подели ја кружницата на 12 еднакви дела (часови).
 - б) Колкав централен агол опфаќа секој од означените кружни лаци?
 - в) Ако обележиш три часа последователно (на пример, од 12 до 3), колкав е централниот агол над тие три часа?
 - г) Колкав централен агол опишува големата стрелка на часовникот за време од 1, 2 или 5 минути?
2. Во цветна градина кружната леа е поделена на 8 еднакви дела за да се засадат различни видови цвеќиња.
 - а) Нацртај кружница и подели ја на 8 еднакви дела.
 - б) Колкав централен агол одговара на еден дел од леата?
 - в) Колкав централен агол опфаќаат заедно два последователни дела?
 - г) Колку дела се потребни за да се формира централен агол од 270° ?
3. Во секоја кружница е даден централниот агол над еден лак:



- а) Колкав централен агол недостига за да ја покрие целата кружница кај секоја од кружниците?
- б) Колку еднакви дела би добиле ако кружницата се подели според дадените агли?

4. На спортска патека кружниот пат е поделен на 9 еднакви дела за вежбање.
 - а) Нацртај кружница и подели ја на 9 еднакви дела.
 - б) Колкав централен агол одговара над еден од дадените делови?
 - в) Ако тркачот помине два дела, колкав централен агол е определен од неговата патека?
 - г) Ако тркачот помине половина од патеката, колку дела поминал?
5. Кружна чинија е украсена со 5 еднакви шарки по нејзиниот раб.
 - а) Нацртај кружница и подели ја на 5 еднакви дела.
 - б) Колкав е централниот агол на секоја шарка?
 - в) Ако два дела се спојат во една шарка, колкав ќе биде новиот централен агол?

Операции со агли

Замисли дека уредуваш простор во домот или градината. За да го направиш тоа, можеби ќе треба да измериш или да пресметаш агли, да ги додадеш или одземеш за да добиеш точни резултати. Во оваа лекција ќе научиш како правилно да ги изведуваш операциите со агли, како да ги претвораш помалите мерки на агли и како да ги применуваш овие вештини во секојдневниот живот.



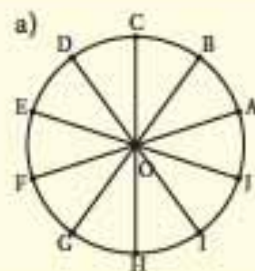
Пример 1

Нацртана е кружница што претставува воденично тркало. Тркалото е поделено на 10 еднакви дела со соодветни радиуси. На секоја од десетте точки на кружницата кружницата е закачена лопатка.

- а) Нацртај кружница и означи ги радиусите што ја делат кружницата на 10 еднакви дела.
- б) Колкав е централниот агол кој одговара на кружен лак меѓу две лопатки?
- в) Колкав централен агол определуваат заедно два соседни кружни лаца?

Решение:

- б) $360^\circ : 10 = 36^\circ$. Аголот меѓу две лопатки е 36° .
- в) Ако сакаме да определиме колкав централен агол отсекува кружниот лак добиен од два соседни кружни лаца заедно, тогаш тој централен агол е: $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$.
Значи, централниот агол е 72° .



Задача 1

На кружница се дадени два централни агли α и β , така што $\alpha = \beta$.

- а) Што можеш да заклучиш за тетивите што ги отсекуваат овие агли?
- б) Што можеш да заклучиш за кружните лаца што ги отсекуваат овие агли?
(Нацртај кружница, означи ги централните агли и тетивите и обиди се да ги споредиш!)

За попрецизни мерења и определување на големината на агол, покрај степенот се користат и следниве мерки: $1'$ (1 минута) и $1''$ (1 секунда).

Еден степен има 60 минути, а 1 минута има 60 секунди.

Тоа значи $1^\circ = 60' = 3600''$.

Пример 2

Во спортската сала наставникот поставил 3 ленти на подот кои се сечат во една точка, така што се добиваат три различни агли кои заедно формираат полн агол. Барањата за учениците се:

- а) Користи агломер за да го измериш секој од аглите меѓу лентите и запиши ги резултатите во степени.
- б) Ако еден степен има 60 минути, колку минути има агол од x° (на пр., 30°)?
- в) Доколку аголот не е цел број, како да го претвориш остатокот од степените во минути?
- г) Ако една минута има 60 секунди, колку секунди има агол од y' (на пр., $15'$)?
- д) Доколку аголот содржи и минути и секунди, како се претвора целата вредност во секунди?
- е) Доколку аголот меѓу лентите е $45,5^\circ$, како ќе се изрази во минути и секунди?
- е) Провери дали сите измерени агли го даваат збирот од 360° . Објасни зошто е потребна оваа проверка?

Решение:

- а) На пример: Аглите меѓу лентите се измерени како $45,5^\circ$, 90° и $224,5^\circ$.
- б) Претворање степени во минути: За $45^\circ = (45 \cdot 60)' = 2700'$.
- в) На пример за: $45,5^\circ$, од б) $45^\circ = 2700'$.

Остатокот, односно децималниот дел $0,5^\circ$ се претвора во минути: $(0,5 \cdot 60)' = 30'$.
Значи, $45,5^\circ = 45^\circ 30'$, односно во минути вкупно $2700' + 30' = 2730'$.

г) Претворање минути во секунди: На пример за $30' = (30 \cdot 60)'' = 1800''$.

д) $45^\circ 30' = (45 \cdot 3600 + 30 \cdot 60)'' = 163800''$

е) Значи, $45,5^\circ = 45^\circ 30' 0''$

е) Збирот на агли: $45,5^\circ + 90^\circ + 224,5^\circ = 360^\circ$. Добивме потврден одговор, збирот на агли е точен бидејќи сите три агли како што се определени од почетокот треба да формираат полн агол.

Пример 3

Една група ученици сака да креира ново училишно знаме. Тие одлучиле на знамето да има нацртано два триаголници со различни бои. Триаголниците имаат агли $65^\circ 20'$ и $72^\circ 40'$. Пресметај го третиот агол.

Решение:

Собирање на првите два агли: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' = (65^\circ + 72^\circ) + (20' + 40')$.

Собери ги степените: Собери ги минутите:

$$65^\circ + 72^\circ = 137^\circ, \quad 20' + 40' = 60'.$$

$60'$ е 1° : Значи $137^\circ + 1^\circ = 138^\circ$.

Пресметување на третиот агол: Одземи го збирот на првите два агли од 180° односно

$$180^\circ - 138^\circ = 42^\circ.$$

Проверка: Збирот на трите агли е: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' + 42^\circ = 180^\circ$.

Пример 4

Дадени се агли $\alpha = 103^\circ 17' 34''$ и $\beta = 48^\circ 46' 38''$. Пресметај:

а) $\alpha + \beta$ б) $\alpha - \beta$

Решение:

$$\begin{array}{r} \text{а) } 103^\circ 17' 34'' \\ + 48^\circ 46' 38'' \\ \hline 151^\circ 63' 72'' \\ \hline 151^\circ 64' 12'' \\ \hline 152^\circ 4' 12'' \end{array}$$

Слично како и при собирањето на неименувани броеви, и овде операциите се вршат почнувајќи од десно на лево. Во добиениот збир треба да направиме поправки користејќи ги врските меѓу мерните единици за агол, $72'' = 60'' + 12'' = 1' 12''$, $63' + 1' = 64'$, $64' = 1^\circ 4'$.

Така добиваме $\alpha + \beta = 151^\circ 63' 72'' = 152^\circ 4' 12''$

$$\begin{array}{r} \text{б) } 103^\circ 17' 34'' \\ - 48^\circ 46' 38'' \\ \hline \end{array}$$

Бидејќи од $34''$ треба да одземеме $38''$ од $17'$ земаме $1' = 60''$ и кај секундите добиваме $34'' + 60'' = 94''$; слично кај минутите: сега од $16'$ треба да одземеме $46'$, па земаме $1^\circ = 60'$ од 103° и кај минутите добиваме $16' + 60' = 76'$, а кај степените остануваат 102° . Тогаш разликата ќе биде пресметана на следниот начин:

$$\begin{array}{r} 102^\circ 76' 94'' \\ 103^\circ 17' 34'' \\ - 48^\circ 46' 38'' \\ \hline 54^\circ 30' 56'' \end{array}$$

Конечно се добива $\alpha - \beta = 54^\circ 30' 56''$.

Задача 2

Пресметај: а) $25^\circ 40' 30'' + 30^\circ 25' 45''$ б) $22^\circ 35' 50'' - 18^\circ 20' 55''$

Пример 5

Инженерите што креираат соларни панели треба да одредат агли за оптимално поставување на панелите за да ја искористат сончевата светлина. Еден панел се поставува под агол од $47^\circ 30'$, а вториот панел треба да биде поставен така што вкупниот агол помеѓу панелите да биде $110^\circ 15'$.

- а) Колкав е аголот на вториот панел?
б) Ако вториот панел треба да се наклони дополнително за $5^\circ 20'$, колкав ќе биде новиот агол на вториот панел?

Решение:

- а) Пресметување на аголот на вториот панел: Вкупниот агол помеѓу двата панела е $110^\circ 15'$. Првиот панел е поставен под агол од $47^\circ 30'$. Се одзема аголот на првиот панел од вкупниот агол: $110^\circ 15' - 47^\circ 30' = 62^\circ 45'$ (агол на вториот панел).
б) Пресметување на новиот агол на вториот панел: Вториот панел се наклонува дополнително за $5^\circ 20'$. Собери го почетниот агол на вториот панел со оваа промена: $62^\circ 45' + 5^\circ 20' = 68^\circ 5'$ (нов агол на вториот панел).

Задача 3

Инженерите што работат на дизајнирањето нов покривен систем за фабрика треба да определат агли на деловите од покривот за да се обезбеди максимална стабилност и ефикасност. Еден од главните елементи на конструкцијата е носечка греда која формира агол од $48^\circ 45'$ со основата на покривот. За да се избегне непотребен товар на структурата, втората греда треба да формира агол од $120^\circ 30'$ со носечката греда.

- а) Колкав е аголот помеѓу втората греда и основата на покривот? Како ќе го пресметаш овој агол ако знаеш дека збирот на трите агли кои се формираат помеѓу носечките греди и основата на покривот треба да биде 180° ?



- б) Ако втората греда треба да биде поставена кон носечката греда под агол што е за $5^\circ 15'$ поголем од претходно зададениот агол, колкав ќе биде новиот агол помеѓу втората греда и основата на покривот? Како ќе ја провериш точноста на промената на аголот?

Како ќе влијае промената на аглите во конструкцијата на покривот врз стабилноста на целата структура? Што би се случило ако аглите се зголемат или намалат премногу, и како би се решавала оваа ситуација при проектирање други архитектонски елементи? Истражувај!

Одговори на прашањата во твојата тетратка. Одговорот на секое прашање потврди го со твој пример.

- Дали можам правилно да ги претворам аглите од поголеми во помали мерки и обратно?
- Дали можам да собирам и одземам агли?
- Дали можам да ги применим овие операции во секојдневни ситуации?

Самостојна работа

- Пресметај $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ако:
 - $\alpha = 82^\circ 17'$, $\beta = 53^\circ 37' 46''$, б) $\alpha = 183^\circ 15' 47''$, $\beta = 98^\circ 4' 52''$
 - $\alpha = 205^\circ$, $\beta = 118^\circ 53' 26''$
- Движејќи се по патот, автомобилот мора да помине три закривувања. На првото закривување одговара агол од $35^\circ 45' 30''$, на второто закривување агол од $72^\circ 10' 15''$, а на третото закривување агол од $58^\circ 25' 45''$.
 - Пресметај го вкупниот агол на закривувањата што го направил автомобилот.
 - Ако автомобилот треба да направи дополнително закривување со агол од $12^\circ 50' 30''$, колкав ќе биде новиот вкупен агол?
- Дадени се аглите $\alpha = 103^\circ 16' 33''$ и $\beta = 61^\circ 47' 37''$. Пресметај: а) $\alpha + \beta$ б) $\alpha - \beta$
- Нека $\alpha = 79^\circ 57' 43''$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 27^\circ 19'$. Пресметај: а) $\alpha + \beta + \gamma$ б) $\beta - \gamma$
- Опреди го аголот α ако $\beta + \gamma = 111^\circ 43'$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
- Аголот $\alpha = 2 \cdot \beta$, $\beta = 35^\circ 35'$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Колкави се аголот α и аголот γ ?

Графичко собирање и одземање агли

Во архитектурата, дизајнот, па дури и во секојдневниот живот често е потребно да конструираме агли со прецизност. На пример, при изработка на мебел или дизајнирање објекти, може да се соочиме со потребата да креираме точен агол еднаков на друг, веќе постоен. Во оваа лекција ќе научиш како да конструираш агол еднаков на даден агол користејќи шестар и линијар и како тоа да го применуваш во собирање и одземање на агли со геометриски прибор при решавање задачи.



Пример 1

Во твојата тетратка нацртај агол кој е еднаков на дадениот на цртежот. Како би го направил тоа?



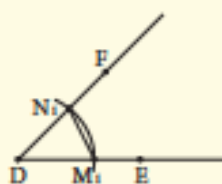
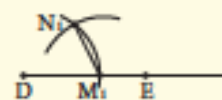
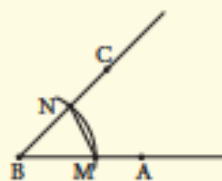
Пример 2

Графичко пренесување на агол еднаков на даден агол.

Решение:

Следи ги чекорите и цртај во твојата тетратка.

- Нацртај $\angle ABC$.
- Нацртај полуправа DE .
- Постави ја иглата на шестарот во темето на $\angle ABC$ и исцртај лак што ги сече краците на аголот во точки M и N .
- Со истиот отвор на шестарот направи кружен лак со центар во точката D . Пресекот на тој кружен лак со полуправата со почетна точка D означи го со M_1 .
- Измери ја должината на тетивата што е соодветна на кружниот лак кој го нацрта кај $\angle ABC$, односно MN .
- Со истиот отвор на шестарот пренеси ја таа должина ставајќи ја иглата на шестарот во точката M_1 . Пресекот на двата лака означи го со N_1 .
- Повлечи го вториот крак на бараниот агол, односно DN_1 (F е точка од полуправата DN_1). Добиениот агол $\angle EDF$ е еднаков на $\angle ABC$.



Обиди се да одговориш на следното прашање: Кое својство на централниот агол се користи при постапката за графичко пренесување на агол?

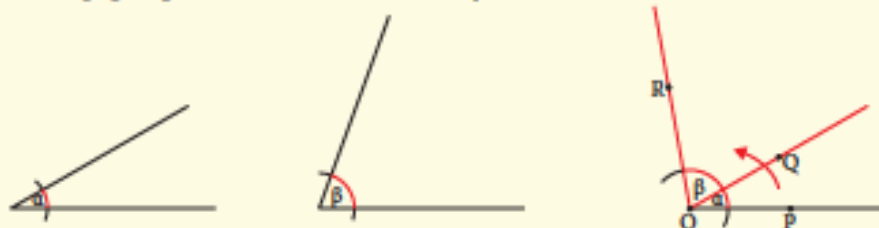
Пример 3

Нацртај два агли α и β во твојата тетратка. Потоа следи ги чекорите за графички да ги собереш агли α и β .

Решение:

Чекори:

- Конструирај агол $\angle POQ$ еднаков на аголот α , според чекорите од пример 2.
- Вториот крак на $\angle POQ$, OQ , ќе биде прв крак за аголот што ќе го конструираш еднаков на аголот β чие теме исто така ќе биде точката O .
- Вториот крак на аголот еднаков на аголот β нека биде означен како OR .
- Новоформираниот агол $\angle POR = \alpha + \beta$.



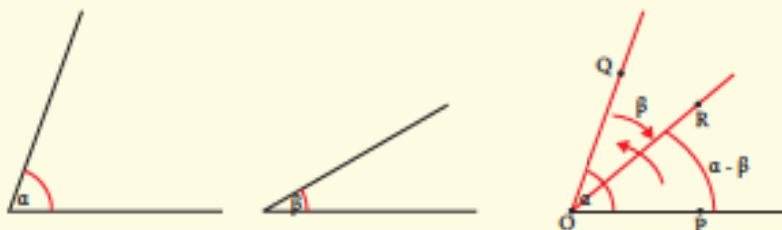
Пример 4

Нацртај два агли α и β , каде што $\alpha > \beta$ во твојата тетратка. Потоа следи ги чекорите за да го одземеш аголот β од α користејќи шестар.

Решение:

Чекори:

- Најпрво, според чекорите од пример 2, правиме графичко пренесување на аголот α (во насока спротивна од насоката на движење на стрелките на часовникот).
- Добиениот агол што е еднаков на α да го означиме $\angle POQ$.
- Графички го пренесуваме аголот β , така што ако за почетен крак го земеме OQ , во насока со движењето на стрелките на часовникот го пренесуваме β , односно $\beta = \angle QOR$.
- Аголот определен со краците OR и OP , односно $\angle POR = \alpha - \beta$.



Задача 1

Нацртај агол $\alpha = 35^\circ$ и агол $\beta = 105^\circ$. Конструирај го аголот: $\gamma = \alpha + \beta$ и аголот $\delta = \beta - \alpha$.

Пример 5

Еден капетан управува со мал брод и треба да го води бродот низ канал. Затоа треба да направи две свртувања. Прво, треба да сврти за агол од 65° надесно, а потоа за агол од 40° налево. На крајот од патот капетанот сака да ја провери точната насока на бродот во однос на почетната насока. Колкав е конечниот агол на свртување?

Решение:

Од условот на задачата првото свртување е 65° надесно, а второто свртување е 40° налево.

Конечниот агол на свртување ќе се најде со одземање на агли. Објасни зошто?

Со пресметување добиваме: $65^\circ - 40^\circ = 25^\circ$.

Значи, конечниот агол на свртување е 25° надесно во однос на почетната насока.

Графичко решение:

- Нацртај агол од 65° и агол од 40° .
- Повлечи права АВ што ја претставува почетната насока на бродот. Избери точка О на правата АВ.
- Пренеси го аголот од 65° со теме во О десно од правата АВ и означи го со $\angle XOY$. ($X \in AB$)
- Пренеси го вториот агол од 40° налево, почнувајќи од кракот ОУ.
- Нацртај ја полуправата ОZ.
- Измери го аголот меѓу почетната насока АВ (ОХ) и конечната насока на бродот ОZ.
- Овој агол е 25° , што значи дека бродот по двете свртувања е на 25° надесно во однос на почетната насока.

Задача 2

Еден сообраќаен инженер уредува тротоар со патеки што се вкрстуваат. Едната патека со тротоарот зафаќа агол од 75° , а другата патека треба да се постави под некој агол, така што заедно со првата патека ќе формираат прав агол. Инженерот сака да дознае:

- а) Под колкав агол со првата патека треба да се постави втората патека, така што таа ќе формира прав агол со тротоарот?
- б) Подоцна, ако треба да се додаде трета патека од спротивната страна на тротоарот под агол од 30° со тротоарот, колку е аголот меѓу првата и третата патека, како и меѓу третата и втората патека?

Замисли дека планираш градинарска патека во форма на триаголник со еден агол од 90° , а другите два агли треба да бидат еднакви. Како ќе ги конструираш тие агли за патеката да изгледа правилно?

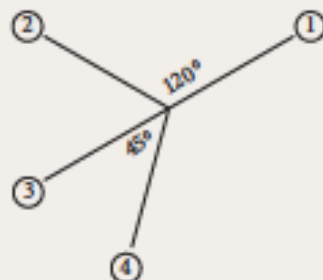
Одговори на прашањата во твојата тетратка. Ако за одговорот на некое прашање не си сигурен, повторно разгледај го примерот од лекцијата кој се однесува на прашањето.

- Дали можам да конструирам агол еднаков на даден агол?
- Дали можам да конструирам збир и разлика на два агли?
- Дали можам да ги применам овие вештини за решавање задачи од реалниот живот?

Самостојна работа

Најди графички решенија.

- Еден инженер дизајнира сообраќајна раскрсница со четири патишта кои се вкрстуваат во една точка како на сликата. Првиот со вториот пат зафаќа агол од 120° , а третиот со четвртиот 45° .
 - Конструирај го аголот што го зафаќаат вториот со третиот пат, ако првиот и третиот пат формираат рамен агол.
 - Конструирај го збирот на трите агли (меѓу првиот и вториот пат, вториот и третиот пат, третиот и четвртиот пат).
 - Конструирај го аголот што ќе го зафаќаат првиот и четвртиот пат.
- Еден столар изработува рамка за маса во форма на триаголник. Еден агол на рамката е 88° . Со конструкција одговори на прашањата:
 - Колку изнесува збирот на другите два агли?
 - Ако еден од нив е 62° , колку изнесува третиот агол?
- Еден техничар поставува соларни панели на покрив. Панелите треба да бидат наклонети под агол од 35° од хоризонталата. Подоцна, техничарот открива дека треба да го зголеми наклонот за дополнителни 12° за оптимална изложеност на сонце. Со конструкција одговори на прашањата:
 - Колкав ќе биде конечниот агол на наклон?
 - Ако сака да врати 8° наназад од приспособениот агол, колкав ќе биде конечниот агол?
- Вера во дворот на својот дом креира цветна леа која има форма на четириаголник. Првиот агол на цветната леа изнесува 110° , вториот агол е 95° , а третиот агол треба да биде 85° .
 - Со конструкција одреди колку изнесува четвртиот агол, знаејќи дека збирот на сите агли во четириаголникот е 360° ?
 - Ако Вера одлучи да го намали третиот агол за 10° , како тоа ќе влијае врз четвртиот агол?
- Конструирај агол што е разлика од аглиите 150° и 60° .
- Дадени се агли: $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 87^\circ$ и $\gamma = 35^\circ$. Конструирај го аголот:
 - $\alpha + \beta - \gamma$
 - $\alpha - \beta + \gamma$
- Нацртај еден тап агол и еден остар агол. Со конструкција одреди ја нивната разлика.



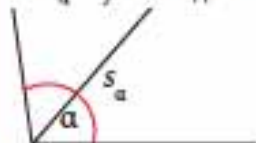
Конструкција на симетрала на агол и аглите од 60° , 30° , 15° , 90° , 45°

Аглите од 60° , 30° , 15° , 90° и 45° се многу често присутни во различни дисциплини, како што се архитектура, дизајн, инженерство и секојдневни активности. Тие се важни за создавање прецизни и правилни објекти, а исто така се користат и за решавање математички и геометриски задачи. Во оваа лекција ќе научиш како да ги конструираш овие агли користејќи едноставни алатки, како што се шестар и линијар.



Пример 1

Нацртај агол од 98° . Со агломер и линијар нацртај симетрала на аголот.



Пример 2

Конструирај симетрала на агол од 108° .

Решение:

Следи ги чекорите и цртај во твојата тетратка.

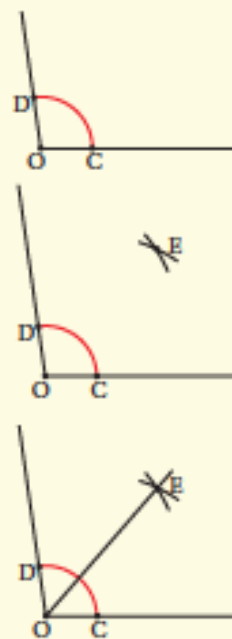
Чекори за конструирање симетрала на агол од 108° со шестар:

- Со помош на агломер, нацртај агол од 108° . Означи го темето на аголот со O .
- Постави го врвот на шестарот во точката O (темето на аголот).
- Со произволен радиус (отвор на шестарот) исцртај лак што ги сече краците на аголот во точки C и D , соодветно.
- Постави го врвот на шестарот во точката C , приспособи го радиусот така што да е малку поголем од половина од растојанието помеѓу C и D .
- Нацртај лак во внатрешноста на аголот.
- Без да го менуваш радиусот, постави го врвот на шестарот во точката D и нацртај друг лак што ќе се сече со првиот лак. Означи ја точката на пресек на овие лац како E .

Со помош на линијар поврзи го темето O со точката E .

Полуправата OE е симетралата на аголот 108° . Проверка:

- Со агломерот измери ги двата агли што ги создава симетралата (OE) со краците OA и OB . Тие треба да бидат еднакви, односно 54° секој.



Задача 1

Нацртај агол од 180° . Конструирај симетрала на аголот. По колку степени е секој агол што се формира со симетралата?

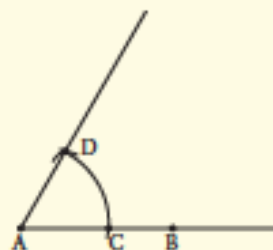
Пример 2

Конструкција на агол од 60° .

Решение:

Цртај во твојата тетратка следејќи ги чекорите за конструирање агол од 60° со шестар:

- Со линијар нацртај полуправа AB .
- Постави го врвот на шестарот во точката A .
- Избери произволен радиус (не премногу голем) и нацртај лак што ја сече полуправата AB . Означи ја точката на пресек на лакот со полуправата како C .
- Без да го менуваш радиусот на шестарот, постави го врвот на шестарот во точката C .
- Нацртај нов лак што го сече претходниот лак. Означи ја точката на пресек на двата лаца како D .



Со линијар нацртај полуправа AD . Оваа полуправа е вториот крак на аголот.

Аголот $\angle BAD$ што го формираат краците AB и AD е агол од 60° .

*Дали би можел да објасниш зошто при оваа конструкција добиениот агол е токму 60° ?

Задача 2

Твоето знаење за конструирање агол од 60° и симетрала на агол искористи го за да конструираш агол од 30° и агол од 15° .

Пример 3

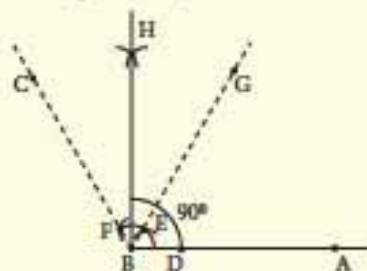
Конструирај агол од 90° .

Решение:

Чекори за конструирање агол од 90° со шестар:

- Со линијар нацртај полуправа BA . Точката B ќе биде теме на аголот што ќе го конструираш.
- Постави го врвот на шестарот во точката B и избери произволен радиус.
- Со шестарот нацртај кружен лак со центар во B што ја сече полуправата BA во точката D .
- Без да го менуваш радиусот на шестарот, постави го врвот на шестарот во точката D и нацртај лак што го сече претходниот кружен лак во точка E .
- Со истиот радиус на шестарот постави го врвот на шестарот во точката E и нацртај лак што го сече првиот кружен лак по втор пат (во точка F).

- Со линијар поврзи ја точката B со точката E, а потоа точката B со точката F.
 - $\angle ABF$ е агол од 120° . Објасни!
- Кој е последниот чекор за да добиеш агол од 90° (односно $\angle ABH$)? За да одговориш на ова прашање, потсети се на конструкцијата за симетрала на агол.

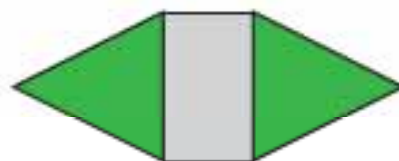


Задача 3

Искористи ја конструкцијата на агол од 90° за да конструираш агол од 45° .

Пример 4

Матео е ученик кој сака да дизајнира рамка за слика што ќе ја направи во училишната работилница. Рамката треба да има два вида агли: агли од 90° за рамката и агли од 60° за декоративните елементи на рамката, како на цртежот.



Решение:

Матео има шестар и линијар. Користи ги чекорите за конструирање агли од 90° и 60° за да му помогнеш на Матео да ги изработи аглите на рамката. Чекори:

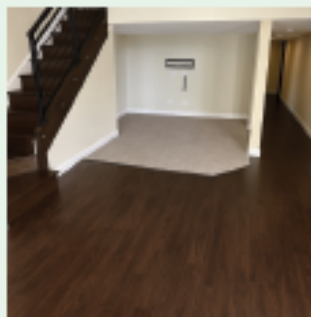
- Со користење шестар и линијар Матео ќе конструира четири агли од 90° за да ја формира правоаголната рамка.
- За декоративните агли, Матео ќе користи чекори за конструирање агол од 60° , преку формирање рамностран триаголник (сите агли во овој триаголник се по 60°).
- Матео ќе ги постави аглите од 60° на двете паралелни страни на рамката.
- Тој ќе провери дали аглите се прецизно формирани користејќи агломер за да ги измери аглите и да се увери дека рамката има точни агли од 90° и декоративни делови со агли од 60° .

Задача 4

Дадена е права и точка A на неа. Со теме во точката A, конструирај го аголот што претставува збир на аглите од 45° и 30° користејќи ги чекорите за конструкција на секој од аглите.

- Колкав е аголот што се доби?
- Колкав е аголот кој е напореден со добиениот?

Како точното разбирање и примената на методите за конструкција на специфични агли може да ти влијае врз решавањето геометриски проблеми и врз секојдневно користење на геометриските принципи? Користи ги сликите за да одговориш на прашањето.

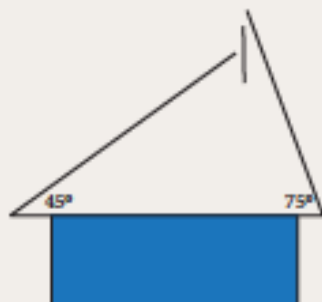


Одговори на прашањата во твојата тетратка. За конструкција на некои агли, ако имаш потреба, врати се на примерите од лекцијата.

- Дали можам да конструирам агли од 30° , 45° , 60° , 90° и 15° ?
- Дали можам да ги применим овие агли во различни практични ситуации?
- Дали користам правилно алатки (шестар и линијар) за конструирање точни агли?

Самостојна работа

- 1.* Конструирај агол од 60° , а потоа само со шестар и линијар подели го на два дела, така што едниот да е 3 пати поголем од другиот.
2. Проектот за изградба на покрив за кука предвидува наклон од 75° во однос на хоризонталната рамнина, а од другата страна наклон од 45° . Претстави ги двата агли со конструкција. Во прилог е дадена скица за изгледот на покривот гледано отстрана.



3. Конструирај агол од:

- а) 150° б) 135° в) 210° г) $37^\circ 30'$

4. Изградбата на сообраќајно решение за голем надвозник бара конструкција на агли од 105° и 45° . Направи го тоа во твојата тетратка и запиши ги чекорите на конструкција.



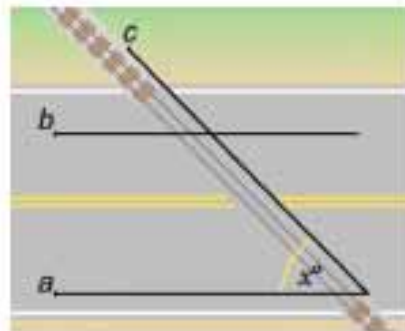
5. Технологијата и софтверските алатки се одлични сојузници во наставата бидејќи нудат динамични алтернативи на традиционалното рачно цртање. Софтверите како GeoGebra, Geometer's Sketchpad и други слични алатки овозможуваат динамична интеракција со геометриските објекти и ја прават математиката поразбирлива и поблиска до реалниот живот.

Задача:

Истражувај со некој геометриски софтвер цртање на агли со дадена големина и определување на нивните симетрали. Различните апликации нудат различни алатки и можности, но во секој случај обезбедуваат брз, интересен и интерактивен пристап при решавање на математичките проблеми.

Трансверзали и паралелни прави

Во оваа лекција ќе ги истражуваш трансверзалите и паралелните прави, два важни концепти во геометријата кои имаат широка примена во секојдневниот живот, како што се патни или инженерски планови. Преку разбирање на аглиите што се формираат на трансверзалата и паралелните прави, ќе се запознаеш со проблемите што се решаваат при проектирање и изградба на различни структури.



Пример 1

Андреа и Петар играат игра на плажа. Андреа нацрта две линии во песокот кои се сечат една со друга. Петар има задача да одреди кои агли се соседни, напоредни и накрсни.

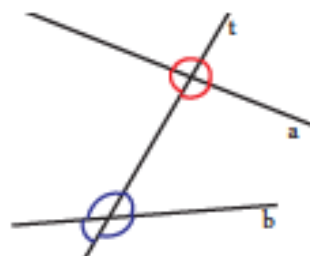
Решение:

- Во овој случај аглиите $\angle 1$ и $\angle 2$ се соседни агли. Објасни зошто.
- Напоредни агли се, исто така, $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 3$ и $\angle 2$, $\angle 1$ и $\angle 4$. Објасни зошто.
- Накрсни агли се $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 4$ и $\angle 2$. Објасни зошто.



Пример 2

- Објасни го цртежот.
- Колку агли се формирани?
- Истражувај ги аглиите што ги формираат правата t и правите a и b .

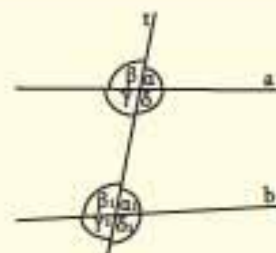


Решение:

- Трансверзалата е права која сече две или повеќе прави во различни точки. При ова сечење се формираат различни видови агли.
- Со трансверзалата се формирани 8 агли, по четири со секоја од правите.

в) Видови агли што се формираат од трансверзалата:

- Внатрешни агли: агли што се наоѓаат помеѓу правите и трансверзалата. Кои се тие агли?
- Надворешни агли: агли што се наоѓаат надвор од правите, на страната спротивна на внатрешните агли. Кои се тие агли?



Согласни агли ги викаме оние парови агли што:

- немаат заедничко теме
- лежат на иста страна од трансверзалата
- едниот е внатрешен, а другиот надворешен агол.

Во нашиов пример, **согласни агли** се следниве парови агли: α и α_1 ; β и β_1 ; γ и γ_1 ; δ и δ_1 .

Наизменични агли ги викаме оние парови агли што:

- немаат заедничко теме
- лежат на различни страни од трансверзалата
- двата се внатрешни, или двата се надворешни агли.

Во нашиов пример, **наизменични агли** се следниве парови агли: α и γ_1 ; β и δ_1 ; δ и β_1 ; γ и α_1 .

Спротивни агли ги викаме оние парови агли што:

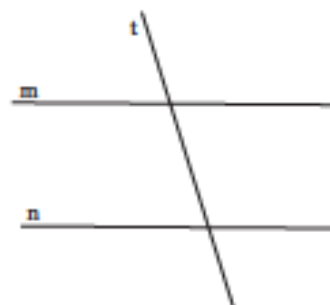
- немаат заедничко теме
- лежат на иста страна од трансверзалата
- двата се внатрешни или двата се надворешни.

Во нашиов пример, **спротивни агли** се следниве парови агли: α и δ_1 ; β и γ_1 ; γ и β_1 ; δ и α_1 .

Задача 1

На цртежот паралелните прави m и n се пресечени со трансверзала t (трансверзала на паралелни прави). Прецртај го во твојата тетратка и обележи ги следниве агли:

- Внатрешните агли.
- Надворешните агли.
- Избери два пара наизменични агли, објасни на која страна од трансверзалата се наоѓаат и дали се внатрешни или надворешни.
- Избери два пара спротивни агли, објасни на која страна од трансверзалата се наоѓаат и дали се внатрешни или надворешни.



Ако правите a и b се паралелни и t е трансверзала, тогаш:

согласните агли
се еднакви



наизменичните агли
се еднакви

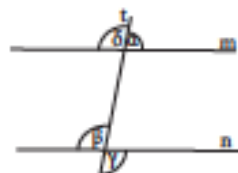


спротивните агли
се суплементни



Задача 2

Опреди ги аглите означени со букви на цртежот и објасни го твојот одговор. На цртежот $m \parallel n$ и $\alpha = 67^\circ$. Пресметај ги аглите β , γ и δ .



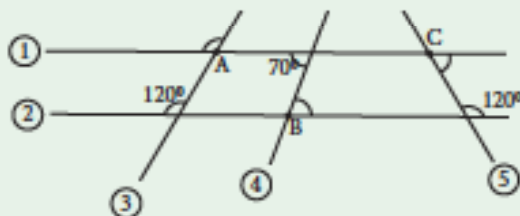
Пример 3

Изработи решение за сообраќајница која вклучува два паралелни главни патишта и три споредни кои ги сечат првите два. Патиштата и некои од точките на пресек се дадени на цртежот. Пресметај ги аглите во означените точки и објасни како врските меѓу тие агли ќе се користат во реалниот свет.

Решение:

$\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Објасни зошто.

Истражувај како аглите влијаат врз: безбедноста на патиштата, градба на инфраструктура, навигација и ориентација, како и економска анализа.



Задача 3

Еден инженер работи на дизајн за парк кој ќе содржи:

- Две паралелни огради што го ограничуваат просторот на паркот (паралелни прави a и b).
 - Три патеки што го пресекуваат паркот и се поврзуваат со оградите под различни агли (трансверзали t_1 , t_2 и t_3).
- а) Одреди колку агли ќе се формираат при сечењето на патеките t_1 , t_2 и t_3 со паралелните огради a и b .
- б) Користи ги поимите внатрешни, надворешни, согласни, спротивни и наизменични агли за да ги објасниш аглите што се формираат.
- в) Запиши по еден пар од секој вид агли на трансверзалите t_1 , t_2 и t_3 .

Размисли за ситуација во која два паралелни патишта се пресечени со права нормална на нив. Какви се аглите кои се формираат со пресечната права?

Нацртај две паралелни прави и трансверзала во твојата тетратка. Одговори на прашањата, користејќи го цртежот што го нацрта.

- Дали ги разликувам аглиите што се формираат меѓу трансверзалата и паралелните прави?
- Мојам ли да ги пресметам непознатите агли кога имам даден агол?
- Како можам да ги применим овие концепти во инженерски или патни планови?

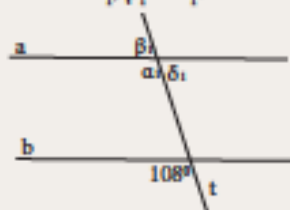
Самостојна работа

- Две паралелни прави a и b се пресечени со трансверзала t , при што еден од внатрешните агли е 65° .
 - Означи ги сите други агли што се формираат.
 - Идентификувај кои агли се внатрешни, надворешни, наизменични, спротивни и согласни.
 - Определ ги сите формирани агли.
- Инженер проектира мост што со реката формира агол од 75° , но мостот ги сече и бреговите кои се паралелни.
 - Идентификувај ги наизменичните и согласните агли.
 - Пресметај ги сите агли што се формираат меѓу мостот и бреговите.
- Во урбанистички план, две паралелни улици a и b се сечат со друга улица како трансверзала t . При мерењето еден агол со теме во пресечна точка на една од правите a или b со трансверзалата е 45° . Пресметај ги сите други агли кои се формираат.

- На цртежот $m \parallel n$ и δ е 5 пати помал од α . Најди ги аглиите α и δ .



- Паралелните прави a и b се пресечени со правата t . Еден од аглиите е 108° . Пресметај ги аглиите δ , β и α !



Конвексни и неконвексни многоаголници

Во оваа лекција ќе научиш како да ги разликуваш конвексните од неконвексните многоаголници. Овие геометрички форми се основа за понатамошно изучување на геометријата. Правилното разбирање на нивните карактеристики е многу важно за да можеш да ги класифицираш и користиш во различни области, како што се архитектурата, инженерството и природните науки.

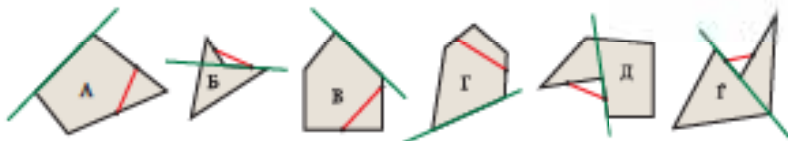


Пример 1

Направи мисловна мапа со основен поим многоаголник. Обиди се да ги вклучиш и веќе изучените поими и класификации во врска со овој поим.

Пример 2

Користи го цртежот и одговори на прашањата



- Во секој многоаголник е повлечена отсечка. Што можеш да кажеш за отсечката кај секој многоаголник?
- По една од страните на секој многоаголник е повлечена права. Која е разликата меѓу многоаголниците во однос на правата?

Решение:

- Кај некои од многоаголниците отсечката не се содржи во многоаголникот. Дали тоа важи за секоја отсечка кај некои од многоаголниците? За кои многоаголници?

Еден многоаголник се нарекува конвексен ако е конвексна геометричка 2Д-форма, односно ако за секои две точки А и В од тој многоаголник, отсечката АВ целосно лежи во него.

- Кај многоаголниците А, В и Г може да се воочи дека многоаголникот е целосно од едната страна на правата, а многоаголниците Б, Д и Г не се целосно од иста страна на таа права. Дали тоа важи за секоја страна од многоаголниците на која е нацртана правата која ја содржи таа страна? За кои многоаголници си одговорил ДА, а за кои НЕ?

Можеме да заклучиме:

1. Ако за секоја страна на многуаголникот нацртаме права која ја содржи таа страна и целиот многуаголник останува од истата страна на таа права, тогаш многуаголникот е конвексен.
2. Ако за некоја страна на многуаголникот нацртаме права која ја содржи таа страна, а дел од многуаголникот останува од спротивната страна на таа права, тогаш многуаголникот не е конвексен, туку е неконвексен.

Задача 1

На цртежот има две 2Д-форми.

- а) Дали првата 2Д-форма е конвексна или неконвексна? Објасни го својот одговор.
- б) Дали втората 2Д-форма е конвексна или неконвексна? Објасни го својот одговор.



Пример 3

Марко и Лена решаваат да постават ограда околу нивната градина во дворот. Тие имаат две опции: ограда во форма на конвексен многуаголник или ограда во форма на неконвексен многуаголник.

- а) Која ограда ќе им биде полесно да ја направат?
- б) Која форма на ограда има агли или делови што ќе треба да се обележат поинаку или ќе треба да се изврши дополнителна работа?
- в) Какви би биле предностите и недостатоците на оградата на конвексниот многуаголник во споредба со неконвексниот многуаголник?

Решение:

- а) Конвексен многуаголник (првата опција): Оградата ќе може лесно да биде поставена бидејќи целата форма ќе биде од истата страна на правата што ја содржи секоја од страните на многуаголникот.
- б) Неконвексен многуаголник (втората опција): Кај некои од страните и аглите може да има тешкотии при поставувањето на оградата бидејќи дел од формата ќе биде од спротивната страна на определената права.
- в) Изборот на ограда и начинот на поставување може да зависи од тоа дали градината е конвексен или неконвексен многуаголник. Кај конвексните многуаголници ќе биде полесно да се постави оградата, додека кај неконвексните многуаголници треба да се направат дополнителни приспособувања.

Задача 2

Каде се среќаваат конвексните многуаголници, а каде неконвексните?



Задача 3

Погледни некои предмети во твојата околина, на пример, објекти во домот или во природата, и одреди дали се во форма на конвексни или неконвексни многуаголници. Напиши неколку примери и објасни зашто ги класифицираш на тој начин.

Замисли дека треба да дизајнираш нов објект за јавен простор (како парк или трговски центар). Како ќе одлучиш дали да користиш конвексни или неконвексни форми во дизајнот? Какви предности и недостатоци ќе имаат овие форми во изградбата и употребата на објектот? Истражувај како влијаат аглиите врз функцијата и естетиката на просторот?

Одговори ги прашањата во твојата тетратка, а потоа сподели ги со твоите соученици.

- Разликувам и можам да ја објаснам разликата меѓу конвексни и неконвексни многуаголници.
- Можам правилно да ги класифицирам многуаголниците на конвексни и неконвексни.
- Можам да ги применим знаењата за конвексни и неконвексни многуаголници во секојдневни задачи и практични примери.



Самостојна работа

1. Проблем со избор на дизајн на парк

Опис: Треба да се направи уредување на нов парк со патеки и зелени површини. Паркот треба да има различни 2Д-форми. Патеката што води до главниот влез треба да има конвексна форма, додека патеката што води до внатрешните места ќе има неконвексна форма.

Прашање: Какви ќе бидат разликите во естетиката и функцијата ако користиш конвексни и неконвексни форми за овие патеки?

2. Проблем со избор на ограда за градина

Опис: Планирај ограда за твојата градина. За дел од оградата ќе користиш правоаголни панели (конвексен многуаголник), додека за друг дел од градината сакаш да користиш ограда во форма на неконвексен многуаголник.

Прашање: Какви практични предности и недостатоци би имале овие два различни дизајни во смисла на безбедност и естетика на твојата ограда?

3. Проблем со изградба на покрив

Опис: Кога се гради покрив на кука, треба да се одлучи дали да се користат конвексни или неконвексни форми за да се создаде интересен дизајн.

Прашање: Која форма ќе биде поефикасна за одвод на дождовната вода и зошто?

4. Проблем со уредување тротоар

Опис: За изградба на тротоар, треба да избереш дали ќе користиш плочки во облик на конвексни многуаголници или ќе се одлучиш за облик на неконвексни многуаголници кои ќе создадат интересен визуелен ефект.

Прашање: Какви ќе бидат предностите и недостатоците на двата типа дизајни во однос на безбедноста и удобноста на пешаците?

Основни поими за триаголници

Во оваа лекција ќе решаваш проблеми со примена на основните поими поврзани со триаголници, вклучувајќи ги средната линија, ортоцентарот, тежиштето, впишаната и опишаната кружница и збирот на аглиите во триаголникот. Триаголникот е една од основните геометрички форми. Тој има три страни и три агли, а постојат многу важни својства што се поврзани со неговите карактеристики.



Пример 1

- Нацртај остроаголен и тапоаголен триаголник.
- Објасни што е висина на триаголник. Повлечи ги и именувај ги висините на секој триаголник.
- Во секој од триаголниците што ги нацрта под а) повлечи ги тежишните линии. Објасни што е тежишна линија на триаголник.
- Нацртај опишана и впишана кружница кај еден остроаголен и еден тапоаголен триаголник.
- На секој триаголник измери ги аглиите и пресметај го нивниот збир.

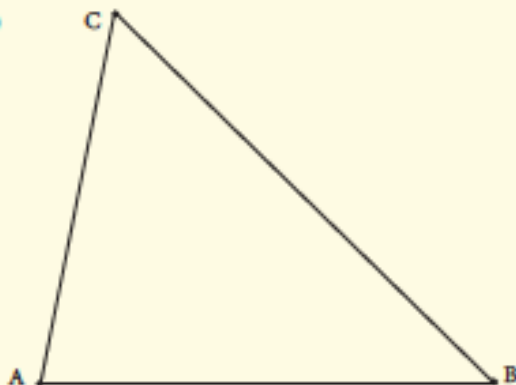
Пример 2

Во $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\overline{BC} = 7\text{ cm}$, $\overline{AC} = 5\text{ cm}$.

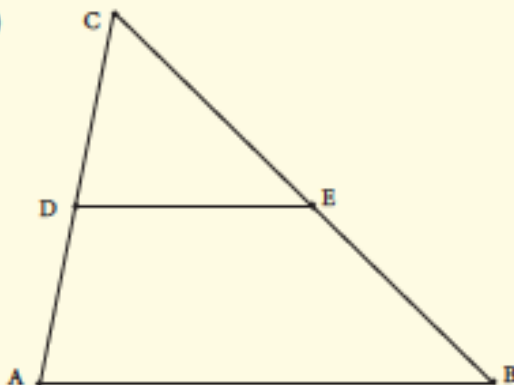
- Нацртај го триаголникот во тетратката и означи ги темињата со A, B и C.
- Означи ја средината на страната AC со D, а средината на страната BC со E. Поврзи ги точките D и E, и измери ја должината на отсечката DE. Кој заклучок можеш да го донесеш за должината на отсечката DE?

Решение:

а)



б)



Ако прецизно си цртал, должината на отсечката $\overline{DE} = 3\text{ cm}$. Таа е паралелна со страната AB, со која нема заедничка точка, и е половина од должината на страната AB на $\triangle ABC$.

Поврзи ги средишните точки на страните AB и AC , како и на страните AB и BC .
Што можеш да кажеш за добиените отсечки? Колкава е нивната должина?

Средна линија е отсечка што ги поврзува средишните точки на две страни на триаголникот.

Таа е паралелна со страната со која нема заеднички точки и нејзината должина е еднаква на половина од должината на таа страна.

Во примерот 1, ако ја означиме средната линија DE со m , имаме $m = \overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $m \parallel AB$.

Задача 1

Во $\triangle DEF$, страна $\overline{DE} = 10$ cm, $\overline{EF} = 12$ cm, $\overline{DF} = 14$ cm.

- Нацртај го $\triangle DEF$ и неговите средни линии.
- Колкава е должината на секоја средна линија?
- На колку триаголници средните линии го делат $\triangle DEF$?
- Нацртај го повторно триаголникот и одреди го тежиштето (T) на триаголникот.
На секоја тежишна линија измери го растојанието од темето до тежиштето и од тежиштето до средната точка на страната што лежи спроти тоа теме. Во каков однос тежиштето ја дели секоја тежишна линија?
- Како ќе провериш дали си бил прецизен во цртањето?
Колкав е збирот на внатрешните агли во триаголник?
Колкав збир доби ти?

Пример 3

Александра сака да направи дрвена украсна рамка во форма на триаголник за да ја постави околу кружен цветен аранжман. Таа мора да одреди неколку важни точки за да ја направи изработката стабилна.

- Каде треба Александра да ја постави украсната лента која ќе биде паралелна со една од страните на триаголникот и има должина половина од неа?
- Како може да ја постави триаголната рамка така што секоја нејзина страна да го допира кружниот цветен аранжман?
- Која точка на триаголникот треба да ја определи за да ја балансира рамката на една точка?
- Како може да направи украс во форма на круг кој минува низ сите три темиња на триаголникот?

- д) Александра сака да ги пресмета аглиите на нејзиниот триаголник за да биде сигурна дека изработката ќе биде правилна. Колкав треба да биде збирот на трите внатрешни агли на триаголникот?

Решение:

За да ѝ помогнеш на Александра, нацртај според дадените упатства:

- Лентата треба да биде поставена по должината на средната линија на триаголникот паралелна со неговата основа.
- За да го постави триаголникот околу кружен цветен аранжман, Александра треба да го одреди центарот на впишаната кружница на триаголникот.
- За да ја балансира рамката во една точка, Александра треба да го одреди тежиштето на триаголникот. Како ќе го најдеш тежиштето на триаголникот?
- За да направи украс во форма на круг кој минува низ сите три темиња на триаголникот, Александра треба да го определи центарот на опишаната кружница на триаголникот.
- Ако збирот на аглиите на триаголникот е 180° , тогаш Александра може да биде сигурна дека изработката ќе биде правилна.



Задача 2

Илир сака да изгради платформа во форма на триаголник што ќе биде стабилна. За таа цел, треба да одреди неколку клучни точки во триаголникот за да ги постави потпорните столбови и каблите.

- За да биде платформата стабилна, Илир треба да ја најде точката во триаголникот каде што ќе може да постави централна потпора што рамномерно ќе ги распределува силите. Која точка во триаголникот ја претставува оваа стабилна потпорна точка и како може да ја најде?
- Каблите на платформата треба да бидат прикачени така што ќе бидат еднакво оддалечени од сите три потпорни точки на платформата. Која точка на триаголникот треба да ја најде Илир за да ги прикачи каблите, така што растојанието до сите три темиња на платформата ќе биде еднакво?
- За да ја зајакне платформата, Илир сака да постави греда што ќе ги поврзе средините на двете страни на триаголникот. Како може да ја најде оваа должина?

Ако имаш три прачки со должини 5 cm, 7 cm и 12 cm, дали можеш да составиш триаголник од нив? Објасни како ти помага правилото за должините на страните на триаголникот за да го одредиш тоа.

Нацртај триаголник во твојата тетратка.



Обој го секој агол на триаголникот според твоето чувство на сигурност за секој критериум.

Зелено – Целосно го разбираам и можам да го применам.

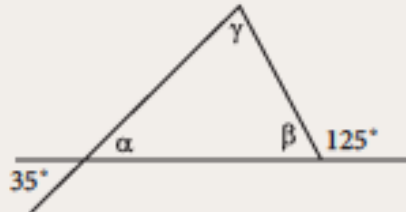
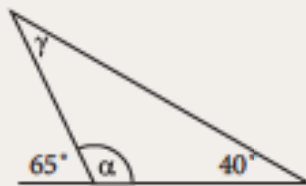
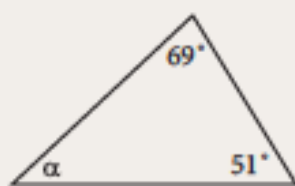
Жолто – Делумно го разбираам, но ми треба дополнително вежбање.

Црвено – Се чувствувам несигурно и ми треба објаснување.

Доколку некој агол е жолт или црвен, напиши прашање што би сакал да ти се разјасни.

Самостојна работа

1. Ако во $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, колку е големината на аголот C ?
2. Објасни ја врската помеѓу големината на аглите и страните во триаголник на кој сите три внатрешни агли му се по 60° . Какви се страните на триаголникот по должина?
3. Во $\triangle ABC$, ако внатрешниот агол кај темето B е 60° , а кај темето C е 50° , пресметај го надворешниот агол на триаголникот во темето A .
4. Даден е триаголник со внатрешни агли $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, и $\angle C = 80^\circ$. Ако $\angle A$ остане 40° , аголот $\angle C$ се зголеми за 10° , а сите три агли и понатаму формираат триаголник, колку степени треба да изнесува новиот агол кај темето B ?
5. Во правоаголен триаголник со страни 3 cm, 4 cm и 5 cm, колкав е аголот помеѓу страните од 3 cm и 4 cm?
6. Одреди ги означените непознати агли на цртежите:



7. Во триаголникот ABC дадено е дека аголот B е 15° помал од аголот A, а аголот C е 30° поголем од аголот B. Најди ги сите три агли во триаголникот.
8. Во триаголникот ABC аголот B е три пати помал од аголот A, а аголот C е два пати поголем од аголот B. Најди ги сите три агли во триаголникот.
9. Во триаголникот ABC страната $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, $\overline{AC} = 10\text{ cm}$.
 - а) Во зависност од големината на страните, утврди кој вид триаголник е и одреди кој агол ќе биде најголем, а кој најмал во триаголникот.
 - б) Пресметај ја должината на секоја средна линија на триаголникот.
10. За триаголникот ABC должините на средните линии се 3 cm, 5 cm и 6 cm. Колкави се страните на триаголникот ABC?
11. а) Нацртај рамностран триаголник.
 б) Одреди го ортоцентарот на триаголникот.
12. Нацртај правоаголен триаголник со катети 8 cm и 6 cm.
 - а) Измери ја должината на хипотенузата.
 - б) Нацртај ја впишаната кружница на триаголникот.
 - в) Нацртај ја опишаната кружница на триаголникот.

Конструкција на триаголници

Во оваа лекција ќе научиш како да конструираш триаголници во различни ситуации, со користење дадени информации: три страни, две страни и аголот меѓу нив, како и страна и два агли што лежат на таа страна.

Триаголникот е геометриска форма со три страни и три агли. Конструирањето триаголници може да се врши со различни комбинации на дадени информации, како што се страни и агли.



Пример 1

Изработи знаменце за спортски натпревари. Знаменцето треба да биде во форма на правоаголен триаголник со катета од 4 cm и агол од 30° меѓу катетата и хипотенузата. За таа цел, користи лист хартија, линијар, агломер, триаголник, шестар и молив.

Решение:

Прво ги црташ зададените елементи со помош на линијар.

Аглите од 30° и 90° можеме да ги

конструираме со шестар (аглите што не можеш да ги конструираш ги црташ со агломер).

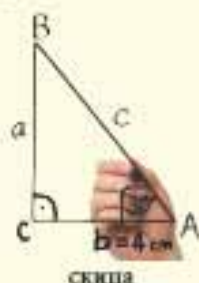
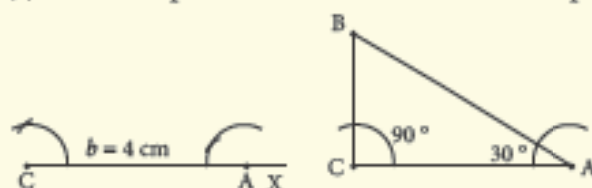
Потоа со слободна рака правиш скица на триаголникот кој треба да го конструираш означувајќи ги неговите елементи. Следува анализа на скицата и нејзина примена во чекорите на конструкција.

Следи ги чекорите и цртај во твојата тетратка.

Чекори за конструкција:

- Нацртај полуправа CX и пренеси ја отсечката од 4 cm со шестар почнувајќи од точката C .
- Крајната точка на таа отсечка означи ја со A .
- Пренеси ги аглите од 30° и 90° во темињата A и C .
- Повлечи ги краците на пренесените агли.
- Пресекот на вториот крак од аголот од 30° и вториот крак од правиот агол означи го со B .

Добиениот триаголник ABC е знамето што требаше да го изработиш.



Пример 2

Конструирај триаголник со страни $a = 35$ mm, $b = 25$ mm, $c = 32$ mm.

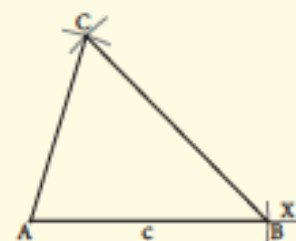
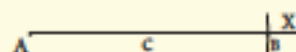
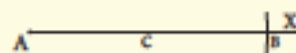
Решение:

- Нацртај ги дадените елементи на триаголникот со линијар.
- Направи скица на триаголникот и означи ги елементите (темиња, страни и агли).
- Од анализата на скицата се доаѓа до чекорите за конструкција.



Чекори за конструкција на триаголник кога се дадени трите страни (ССС):

- Нацртај полуправа AH и со шестар пренеси ја должината на страната c .
- Пресекот на кружниот лак со полуправата AH означи го со B .
- Со шестарот земи ја должината на b и постави го врвот на шестарот во точката A (односно, нацртај кружен лак со центар во A и радиус b).
- Потоа отвори го шестарот колку што е должината на a и постави го врвот на шестарот во точката B (нацртај кружен лак со центар во B и радиус a).
- Пресекот на двата кружни лаца што ќе ги направиш ќе биде точката C . Ако има две пресечни точки, избери една (зависно од условите во задачата).
- Со линијар поврзи ги точките A и C , B и C .
- $\triangle ABC$ е конструиран.



Задача 1

Конструирај триаголник со страни од 5 cm, 7 cm и 9 cm. Провери дали сите страни се еднакви со дадените должини.

Пример 3

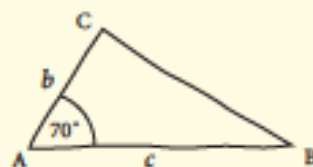
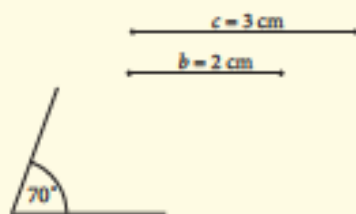
Дадени се две страни $b = 2$ cm и $c = 3$ cm, а аголот меѓу нив е $\alpha = 70^\circ$. Користи линијар и шестар за да го конструираш триаголникот.

Решение:

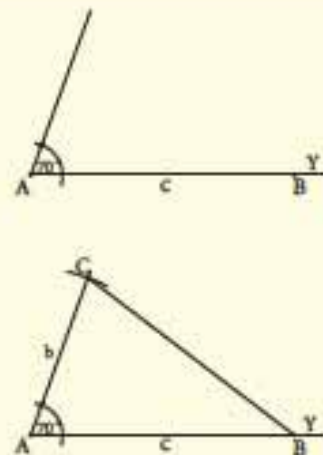
- Нацртај ги дадените елементи на триаголникот, двете страни и аголот меѓу нив, со линијар и агломер.
- Направи скица на триаголникот и означи ги елементите (темиња, страни и агли).
- Од анализата на скицата се доаѓа до чекорите за конструкција.

Чекори за конструкција на триаголник кога се дадени две страни и агол меѓу нив (САС):

- Нацртај полуправа AH .
- Отвори го шестарот колку што е отсечката $c = \overline{AB}$, односно едната страна на триаголникот (нацртај кружен лак со центар A и радиус $c = \overline{AB}$).



- Пресекот на кружниот лак со полуправата означи го со В, т.е. $k(A, \overline{AB}) \cap AY = \{B\}$.
- Пренеси го аголот од 70° со шестар во теме А.
- Повлечи го вториот крак на аголот од 70° со линијар.
- На вториот крак од аголот од 70° направи лак со шестарот кој го отвораш колку што е страната $b = AC$ почнувајќи од точката А (кружен лак со центар А и радиус $b = AC$).
- Пресекот на вториот крак на аголот со лакот означи го со С.
- Поврзи ги точките В и С.
- $\triangle ABC$ е конструиран.

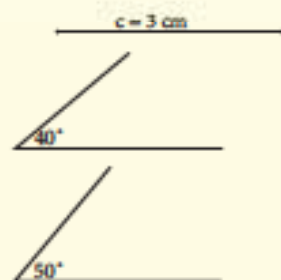
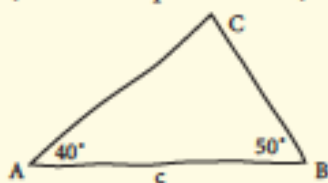


Пример 4

Конструирај триаголник ако е дадена една негова страна $c = 3 \text{ cm}$ и два агли: $\alpha = 40^\circ$ и $\beta = 50^\circ$ кои лежат на таа страна од триаголникот.

Решение:

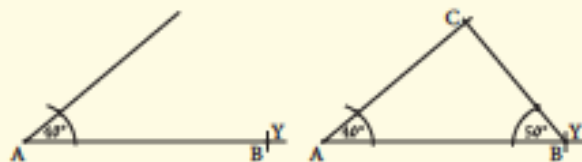
- Нацртај ги дадените елементи на триаголникот, страната и двата агли со линијар и агломер.
- Направи скица на триаголникот и означи ги елементите (темиња, страни и агли).



- Од анализата на скицата се доаѓа до чекорите за конструкција.

Чекори за конструкција на триаголник кога се дадени една страна и два агли на страната: (АСА)

- Нацртај полуправа АУ.
- Пренеси ја должината $c = \overline{AB}$ и означи ја точката В.
- Пренеси го со шестар аголот од 40° со теме во точката А.
- Пренеси го со шестар аголот од 50° со теме во точката В.
- Пресекот на добиените краци на аглите од 40° и 50° означи го со С.
- $\triangle ABC$ е конструиран.



Задача 2

Конструирај триаголник за кој е дадено:

- а) $\overline{MN} = 7 \text{ cm}$, $\angle NMP = 65^\circ$, $\angle MNP = 70^\circ$ б) $\overline{KL} = 7 \text{ cm}$, $\overline{KQ} = 6 \text{ cm}$, $\overline{LQ} = 5 \text{ cm}$
 в) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$, $\angle ABC = 45^\circ$

Пример 5

Работник на градилиште при изработка на покривот треба да конструира триаголник за кој се дадени должина на страна 9 m и два агли кои лежат на таа страна од 45° и 65° .

Упатство за решавање: Во твојата тетратка наместо метри, користи cm и чекорите за конструкција дадени во четвртиот пример (АСА). Провери дали во конструираниот триаголник збирот на аглите е 180° .

Задача 3

При геодетско мерење треба да се конструира теренска мапа каде што еден триаголник ги има следниве елементи: една страна $\overline{AB} = 8 \text{ m}$, друга страна $\overline{AC} = 7 \text{ m}$ и аголот меѓу нив $\angle CAB = 50^\circ$. Користејќи размер, конструирај го триаголникот и измери ја должината на страната спроти аголот од 50° . Колкава е нејзината должина во природна големина?

Кога ги конструираше триаголниците во оваа лекција, кои чекори ти беа најлесни, а кои најпредизвикувачки? Што би променил во твојот пристап за да бидеш побрз и попрецизен во иднина во задачите во кои се бара конструкција на триаголник?

Одговори во твојата тетратка. За конструкцијата на триаголник за кој не си сигурен/а, повторно разгледај го примерот од лекцијата.

- Запиши ги твоите размислувања за конструкцијата на триаголниците.
- Дали успеа да ги примениш правилата и поимите во практични задачи?
- Дали ја разбираш разликата помеѓу различните начини на конструкција?

Самостојна работа

1. Конструирај рамностран триаголник со страна 5 cm.
- 2*. Конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза 6 cm и агол од 45° .
3. Конструирај рамнокрак триаголник со основа 7 cm и агол при основата 55° .
4. Конструирај рамнокрак триаголник со крак 8 cm и агол меѓу краците од 75° .
5. Конструирај рамнокрак правоаголен триаголник со крак 4 cm.

Конструкција на опишана и на впишана кружница на триаголник

Во оваа лекција ќе научиш како да ги конструираш центрите на опишаната и на впишаната кружница во триаголник, како и важноста на овие точки во геометриските конструкции.

Центрите на впишаната и на опишаната кружница се важни точки во триаголникот. Овие центри се важни бидејќи со нивна помош можеш да креираш кружница што ги допира страните на триаголникот (впишана) или минува низ сите темиња на триаголникот (описана).

Тие се клучни во различни геометриски задачи, како и во дизајн и инженерство.

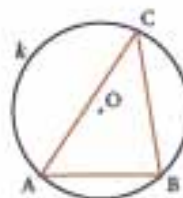


Пример 1

Нацртај опишана кружница на триаголник со страни 5 cm, 6 cm и 7 cm.

Објасни што е опишана кружница на триаголник.

Ако си цртал прецизно, кружницата ќе минува низ темињата на триаголникот.



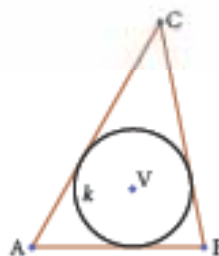
Пример 2

Нацртај впишана кружница на триаголник со страни 6 cm, 8 cm и 9 cm.

Објасни што е впишана кружница на триаголник.

Ако си цртал прецизно, кружницата ќе ги допира трите страни на триаголникот. Што претставува секоја страна на триаголникот за кружницата?

За да ги најдеш центрите на опишана и впишана кружница на триаголник, во примерите погоре користеше линијар и агломер.



Пример 3

Конструирај ја опишаната кружница на триаголник со страни 6 cm, 5 cm и 4 cm.

Кога се вели „конструирај“ се мисли на користење само на шестар и линијар.

Решение:

За оваа конструкција може да се потсетиш на конструирање триаголник ако се дадени трите страни и конструирање симетрала на отсечка. За да конструираш центар на опишана кружница, следи ги чекорите и цртај во твојата тетратка:

- Конструирај го $\triangle ABC$ со дадените три страни (CCC). Конструирај симетрала на страната AB на $\triangle ABC$.
- Конструирај симетрала на страната BC.
- Конструирај симетрала на страната CA (оваа симетрала може и да не се конструира, зошто?)

- Пресекот на симетралите на страните на $\triangle ABC$ означи го со O .
- Врвот од шестарот постави го во точката O .

Отвори го шестарот до кое било теме на триаголникот и опиши кружница.



Пример 4

Конструирај ја впишаната кружница на триаголник со страни 6 cm, 8 cm и агол од 70° .

Решение:

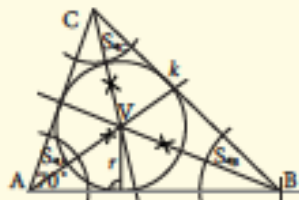
За оваа конструкција може прво да се потсетиш на конструирање триаголник ако се дадени две страни и аголот меѓу нив, и конструирање симетрала на агол. За да конструираш центар на впишана кружница, следи ги чекорите и цртај во твојата тетратка:

- Конструирај триаголник со дадени две страни и аголот меѓу нив (C.A.C).
- Конструирај симетрала на $\sphericalangle A$ на $\triangle ABC$.
- Конструирај симетрала на $\sphericalangle B$ на $\triangle ABC$.
- Конструирај симетрала на $\sphericalangle C$ на $\triangle ABC$ (може оваа симетрала да не се конструира, доволно се две).
- Пресекот на симетралите на аглите на триаголникот означи го со V .
- Врвот од шестарот постави го во точката V .

Отвори го шестарот колку што е растојанието до која било страна на триаголникот (на цртежот означено со r) и нацртај кружница.

Во пример 3 и пример 4, за да конструираш опишана и впишана кружница на триаголник, користеше линијар и шестар.

Кој начин на одредување на центарот на опишана и впишана кружница на триаголник е попрецизен, со линијар и агломер или со линијар и шестар?



Задача 1

Конструирај впишана и опишана кружница на триаголник со страна 5 cm и агли на страната 30° и 70° .

Пример 5

Во еден парк се планира да се постави фонтана во форма на кружница така што ќе ја допира секоја од трите патеки кои формираат триаголник. Потоа треба да се постави цветен дел со кружна форма опишан околу тој триаголник.

Решение:

- Направи скица според податоците од примерот 5.
- Нацртај го триаголникот формиран од патеките во паркот (со должини на страните по твој избор).
- Конструирај ја впишаната кружница на триаголникот за да ја определиш позицијата на фонтаната.
- Конструирај ја опишаната кружница на триаголникот за да го планираш цветниот дел околу триаголникот.

Ова ќе обезбеди естетска поставеност на фонтаната и цветниот дел во однос на патеките во паркот.

Задача 2

На еден градски плоштад во форма на триаголник треба да се постават светилки:

- Една главна светилка е во центарот на плоштадот за рамномерно осветлување (еднакво оддалечена од трите страни на триаголникот).
- Декоративни светилки во кружна линија околу плоштадот за да се осветли целата површина.

Како би ги одредил:

- Точната локација на главната светилка?
- Радиусот и центарот на кружницата за поставување на декоративните светилки?

Наброј примери каде може да се примени конструкцијата на впишана и на опишана кружница на триаголник? Објасни ја важноста на прецизноста при конструкцијата во тие ситуации.



Пишувај во твојата тетратка. Твоите одговори сподели ги со твоите соученици.

- Напиши кратка рефлексija за тоа што научи за конструкцијата на центрите на опишаната и на впишаната кружница.
- Дали успеа правилно да ги примениш поимите?
- Какви задачи од секојдневниот живот можеш да решаваш со овие техники?

Самостојна работа

Задачи за конструкција на впишана и на опишана кружница на триаголник:

1. Нацртај кружна ограда околу триаголен простор (7 m, 5 m и 8 m). Користи размер.
2. Дизајнирај тркалезна цветна градина околу фонтана во форма на рамнокрак триаголник (крак 7 m и агол меѓу краците 80°). Користи размер.
3. Нацртај место за споменик на простор во форма на триаголник (една страна 4 m и аглите на таа страна 45° и 45°), а потоа конструирај кружница околу триаголникот која ќе се користи за дополнителни декоративни елементи (користи размер).
4. Конструирај впишана и опишана кружница на рамностран триаголник со страна 5,5 cm.
5. Симеон во својата нива избрал три точки во кои ќе се поставуваат прскалки за наводнување. Помогни му да ја најде локацијата на централна точка за поставување на местото за довод на вода што ќе биде еднакво оддалечена од сите три прскалки за наводнување.
6. (Задача со користење образовен софтвер): Треба да изработиш проект за дизајн на нов парк во твојот град. Паркот треба да има геометриски елементи како што се патеки, дрвореди, цвекарници, чешми, клупи, фонтани, светилки кои формираат триаголници и кружници. Твоја задача е да користиш образовен софтвер за да ги нацрташ овие форми. Притоа ќе треба и да ги наоѓаш точките на допир меѓу триаголниците и кружниците за да ги обезбедиш правилните растојанија и пропорции дадени во проектот, некои карактеристични точки во триаголниците соодветни на целта која треба да обезбеди стабилност и разновидно и правилно уредување на просторот. Користи различни алатки од образовниот софтвер со кои ќе прикажеш што е можно повеќе геометриски концепти како конструкција, отсечка, агол, симетрала, ортоцентар, тежиште, мерење, впишана, опишана кружница и сл.

Четириаголници и класификација според паралелност на страните

Четириаголници се многуаголници кои имаат четири страни, четири внатрешни (надворешни) агли и четири темиња. Тие можат да се класифицираат според различни карактеристики, како што се: должина на страните, големина на аглите или паралелност на страните. Во оваа лекција ќе се фокусираш на класификацијата на четириаголниците според паралелноста на нивните спротивни страни. Ќе научиш како да препознаеш различни видови четириаголници, како правоаголници, ромбови, паралелограми, трапези и квадрати. Ова знаење не само што ќе ти помогне во геометријата, туку ќе го користиш и во секојдневни ситуации, на пример, при избор на форми во архитектурата или дизајнот.



Пример 1

Александра и нејзините пријатели решиле да направат украс за училишниот настан. Тие исекле хартија во форма како на цртежот. Додека ја украсувале формата што ја исекле од хартија, се потсетиле на некои важни геометриски поими. Потсети се и ти, одговорајќи на следните прашања:



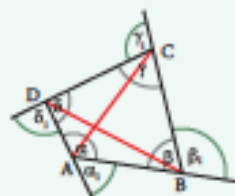
- Каква 2D-форма исекле Александра и нејзините пријатели? Објасни зошто.
- Дали овој четириаголник е конвексен или неконвексен многуаголник?
- Колку темиња, страни и агли има четириаголникот?
- Кои страни на четириаголникот се соседни, а кои спротивни?
- Кои темиња на четириаголникот се соседни, а кои спротивни?
- Кои агли на четириаголникот се соседни, а кои спротивни?
- Кои агли на четириаголникот се внатрешни, а кои надворешни?
- Како можеш да најдеш надворешен агол на четириаголникот?
- Повлечи ги дијагоналите на четириаголникот.

Какви триаголници добиваш со секоја дијагонала?

Многуаголник кој има четири страни (четири темиња, агли) го викаме четириаголник.

Решение:

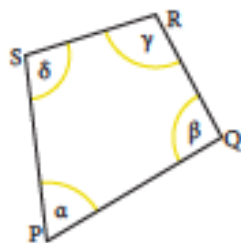
Направи цртеж во твојата тетратка како дадениот цртеж и користи го за да одговориш на прашањата.



Задача 1

За четириаголникот PQRS од цртежот, запиши:

- Соседни и спротивни темиња
- Соседни и спротивни страни
- Соседни и спротивни агли
- Колку пара спротивни страни има секој четириаголник?



Пример 2

Ана и Бојан си играле во паркот и забележале различни форми на плочките на патеката. Ана забележала дека некои од плочките изгледаат како да имаат паралелни страни, а други не. Тие одлучиле да ја нацртаат формата на неколку плочки и да побараат помош од наставничката за да дознаат повеќе за нив.



Наставничката им дала три прашања за да ги категоризираат плочките според паралелноста на страните:

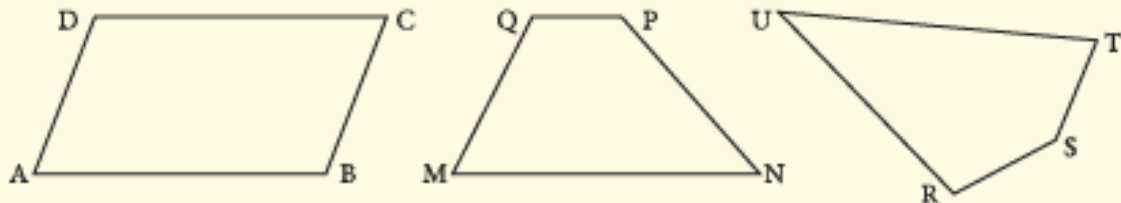
Прво прашање: Плочката на Ана има два пара паралелни спротивни страни. Каков вид четириаголник е оваа плочка?

Второ прашање: Бојан нацртал плочка со само еден пар паралелни спротивни страни, додека другите две страни не се паралелни. Каков вид четириаголник е ова?

Трето прашање: На крај, тие нацртале плочка која нема ниту еден пар паралелни спротивни страни. Каков вид четириаголник е оваа форма?

Нацртај три различни четириаголници што одговараат на описите од прашањата. Означи ги темињата и провери дали страните се паралелни, а ако одговорот е позитивен, одговори колку пара паралелни страни имаат. Објасни во која категорија припаѓа секој четириаголник според паралелноста на страните.

Решение:



Првиот четириаголник (на Ана) припаѓа во категорија четириаголници кои имаат два пара паралелни спротивни страни.

Вториот четириаголник (на Бојан) припаѓа во категорија четириаголници кои имаат само еден пар паралелни спротивни страни.

Третиот четириаголник припаѓа во категорија четириаголници кои немаат ниту еден пар паралелни спротивни страни.

Според паралелноста на страните, четириаголниците можеме да ги класифицираме во три категории:

- Четириаголникот во кој две по две спротивни страни се паралелни се вика паралелограм.
- Четириаголникот кој има само еден пар паралелни страни се вика трапез.
- Четириаголникот кој нема ниту еден пар паралелни страни се вика трапезоид.

Трапезоидот во кој две по две соседни страни се еднакви се вика делтоид.



Рамнокрак трапез е трапезот во кој непаралелните страни имаат еднакви должини.

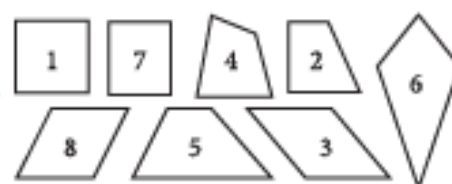


Задача 2

На цртежот се дадени повеќе четириаголници

а) Прецртај ја табелата во твојата тетратка и пополни ја.

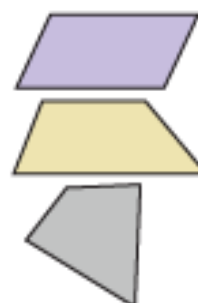
Четириаголници	Бројот со кој е означен четириаголникот
Паралелограм	
Трапез	
Трапезоид	



б) Кој од четириаголниците е делтоид? Објасни зошто.

Пример 3

Локалната заедница организира акција за чистење на паркот. Волонтерите забележале дека некои од плочките од старото игралиште се искршени и треба да се заменат. Новите плочки што треба да се нарачаат се во форма на четириаголници, но добавувачот нуди различни видови четириаголници. За да ја олесни работата, координаторот на акцијата замолил еден волонтер да ги класифицира плочките според паралелноста на страните:



- Една од постарите плочки има два пара паралелни спротивни страни. Каков вид четириаголник е оваа плочка?
- Една од новите плочки има само еден пар паралелни страни. Каков вид четириаголник е оваа плочка?
- Некои остатоци од старите плочки немаат паралелни страни. Каков вид четириаголник се овие плочки?
- Да нацрта по еден четириаголник од секоја категорија (со два пара паралелни страни, со еден пар паралелни страни и без паралелни страни). Во секој цртеж да ги означат страните што се паралелни.

Решение:

- Плочката со два пара паралелни страни е паралелограм.
- Плочката со еден пар паралелни страни е трапез.
- Плочката без паралелни страни е трапезоид.
- Паровите паралелни страни се обоени со сина, црвена или зелена боја.



Задача 3

Ана сака да уреди градина во својот двор. Таа планира да ги засади цвеќињата и зеленчукот во различни форми на парцели кои имаат четириаголна форма. Еве го планот што го направила:



- Каков четириаголник е секоја парцела во планот што го направила Ана?
- Како може најлесно да ги измери страните и да одреди дали се паралелни или не?
- Ана сака да направи патека во секоја од парцелите што поврзува спротивни темиња на парцелата. Како може да се увери дека патеката ќе ја дели секоја парцела на два триаголници? Објасни го твојот одговор.

Изработи мисловна мапа за поимот четириаголник во која ќе ги вклучиш сите досега изучени концепти во врска со тој поим.

Одговори ги прашањата во твојата тетратка

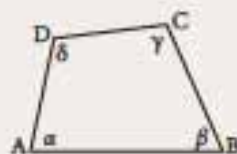
- Дали точно ги класифицирам четириаголниците според паралелноста на страните?
 - Дали правилно ги користам поимите за различните видови четириаголници (паралелограм, трапез, трапезоид)?
 - Како би го оценил своето разбирање за четириаголници? (Од 1 до 5, каде што 1 е целосно неразбрано, а 5 е целосно разбрано).
- За тие поими што не си сигурен, повторно врати се на лекцијата.

Самостојна работа

1. Кои се основните елементи на четириаголник?

2. Во врска со четириаголникот ABCD запиши:

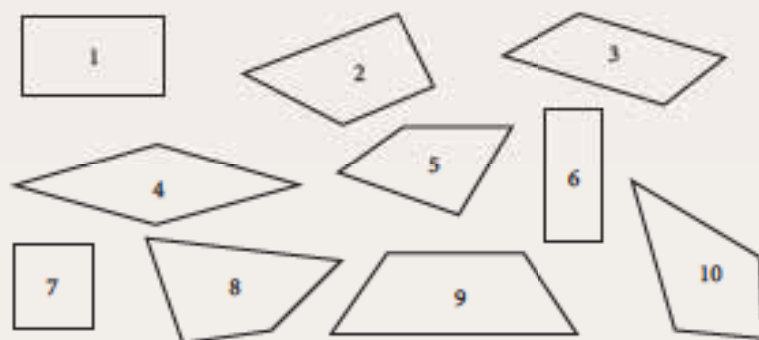
- две соседни темиња
- две соседни страни
- два спротивни агли



3. Што е точно?

- Секој четириаголник има само еден пар спротивни темиња.
- Секој четириаголник има само два пара соседни страни.
- Секој четириаголник има две дијагонали.

4. Класифицирај ги четириаголниците од цртежот според паралелноста на страните.



5. Нацртај две паралелни прави m и n , а потоа пресечи ги со други две паралелни прави l и k .

Пресечните точки на правите означи ги со букви.

- Каков четириаголник доби?
- Именувај ги внатрешните и надворешните агли на тој четириаголник.
- Колкав е секој внатрешен и соодветниот надворешен агол? Користи агломер.

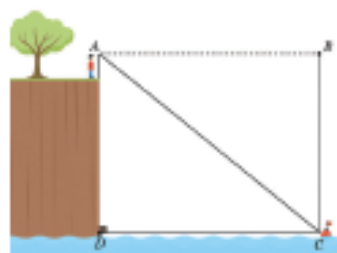
6. Нацртај четириаголник MNPQ и повлечи ги неговите дијагонали. Објасни (запиши) што е дијагонала на четириаголник.

7. Нацртај две паралелни прави m и n . На правата m означи две точки M и N, а на правата n точка P. Потоа доцртај еден паралелограм и еден трапез со заеднички темиња M, N и P.

Збир на агли во четириаголник

Досега се сретна со различни четириаголници (паралелограм, трапез, трапезоид). Иако овие четириаголници изгледаат различно, тие имаат едно заедничко својство – збирот на нивните внатрешни агли е секогаш ист!

Во оваа лекција ќе научиш: Како да го пресметаш збирот на агли во секој четириаголник; Зошто сите четириаголници имаат ист збир на агли, без разлика на нивната форма; Како да го користиш ова својство за да решаваш задачи и проблеми во геометријата.



Пример 1

Архитект планира да изгради триаголен прозорец со агли 65° и 75° . Каков вид триаголник е прозорецот?

Упатство за решавање. Определи го непознатиот агол на триаголникот за да одговориш на прашањето од кој вид е триаголникот.

Задача 1

Триаголникот ABC има агол од $32^\circ 44'$ и вториот агол е два пати поголем од дадениот агол. Колку е третиот агол на триаголникот ABC?

Пример 2

Пресметај го збирот на агли во четириаголникот MNPQ.

Решение:

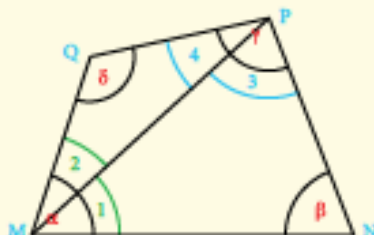
Збирот на агли во четириаголникот е $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Со повлекување на дијагоналата MP во четириаголникот MNPQ тој се дели на два триаголника. Од $\triangle MNP$ имаме $\angle 1 + \beta + \angle 3 = 180^\circ$, а од $\triangle MPQ$ имаме $\angle 2 + \delta + \angle 4 = 180^\circ$ (збир на агли во триаголник).

Ако на овие две равенства им ги собереме посебно левите, а посебно десните страни, се добива:

$$\angle 1 + \angle 2 + \beta + \angle 3 + \angle 4 + \delta = 2 \cdot 180^\circ.$$

Со замена на $\angle 1 + \angle 2 = \alpha$ и $\angle 3 + \angle 4 = \gamma$ во горното равенство се добива $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.



Во секој четириаголник збирот на внатрешните агли е еднаков на 360° или на еден полн агол.

Пример 3

Најди го збирот на надворешните агли на четириаголник ABCD.

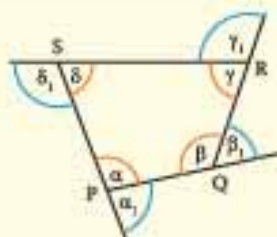
Решение:

Секој внатрешен со соодветниот надворешен агол формира рамен агол, односно:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ; \quad \beta + \beta_1 = 180^\circ; \quad \gamma + \gamma_1 = 180^\circ; \quad \delta + \delta_1 = 180^\circ$$

Ако ги собереме посебно левите, а посебно десните страни на овие равенства, се добива: $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Бидејќи $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (збир на внатрешни агли) се добива дека збирот на надворешните агли е $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.



Во секој четириаголник збирот на надворешните агли е еднаков на 360° или на еден полн агол.

Со други зборови кажано, збирот на внатрешните агли и збирот на надворешните агли во четириаголникот се еднакви и изнесуваат 360° .

Задача 2

Три од надворешните агли од четириаголникот се: 72° , 141° и 55° . Одреди ги внатрешните агли на четириаголникот и четвртиот надворешен агол.

Пример 4

Ти си еден од членовите на училишниот тим кој треба да го уреди училишниот двор кој има форма на четириаголник. Трите внатрешни агли на училишниот двор се 90° , 110° и 89° . Колку е четвртиот внатрешен агол? Одреди го секој надворешен агол на четириаголникот.

Решение:

Бидејќи збирот на внатрешните агли на кој било четириаголник е 360° , а збирот на дадените три агли е: $90^\circ + 110^\circ + 89^\circ = 289^\circ$, четвртиот агол е: $360^\circ - 289^\circ = 71^\circ$.

Внатрешен агол заедно со соодветниот надворешен агол формираат рамен агол, па така, на пример, за надворешниот агол кој е соодветен на аголот од 110° имаме $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Најди ги останатите надворешни агли на четириаголникот.

Задача 3

Во паркот има жардиниера во форма на четириаголник со агли 90° и 120° . Колку е збирот на другите два агла на жардиниерата?

Дали постои четириаголник на кој збирот од трите внатрешни агли е еднаков на четвртиот внатрешен агол? Дали постои четириаголник на кој сите четири агли му се остри агли?

Одговори на прашањата во твојата тетратка. За тоа што имаш потреба за подобрување на твоето разбирање, врати се на лекцијата.

1. Што научив за агли на четириаголник?
2. Каде имам тешкотии во разбирањето или примената на тоа што го учев во оваа лекција?
3. Што можам да направам за да го подобрам своето разбирање?

Самостојна работа

1. Во четириаголникот ABCD, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B + \angle C = 210^\circ$. Колку степени има аголот $\angle D$?
2. Во еден четириаголник три од надворешните агли се: 120° , 80° и 100° . Одреди го четвртиот надворешен агол.
3. Во еден четириаголник ABCD двата внатрешни агла кај темињата A и D се 65° и 120° , соодветно. Надворешниот агол кај темето C е 70° . Одреди ги големините на внатрешните агли кај темињата B и C.
4. Дали постои четириаголник во кој сите внатрешни агли се поголеми од 90° ? Објасни го одговорот.
5. При мерење на агли на еден четириаголник е добиено дека: $\alpha = 75^\circ 20'$, $\beta = 130^\circ 10'$ и $\delta = 160^\circ$. Дали при мерењето е направена грешка? Објасни го твојот одговор.
6. Во еден четириаголник два од внатрешните агли се еднакви меѓу себе. Другите два агли се 70° и 120° . Одреди ја големината на непознатите агли.
7. Во еден четириаголник еден од агли на е 30° , другиот е за 13° поголем, а третиот е два пати поголем од збирот на првите два. Одреди ги агли на четириаголникот.
- 8.* Една од дијагоналите на парцела во форма на четириаголник ја дели парцелата на рамностран и рамнокрак правоаголен триаголник. Одреди ги внатрешните агли на парцелата.
- 9.* Два соседни агли на четириаголник се 98° и 108° . Одреди го аголот меѓу симетралите на тие агли.

Паралелограм и својства на паралелограм

Во претходната лекција се запозна со еден важен вид четириаголник – паралелограм. Паралелограмот е четириаголник во кој спротивните страни се паралелни и еднакви. Овој вид четириаголник има интересни својства кои ќе ги истражуваме заедно. Откако ќе ги разбереш својствата на паралелограмот, ќе бидеш во можност да ги применуваш во решавање различни задачи и да ги користиш во геометриски проблеми.



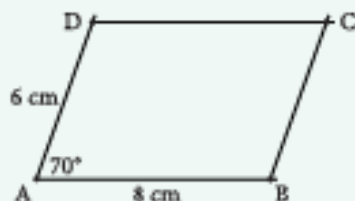
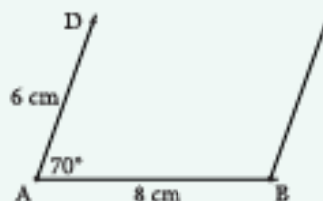
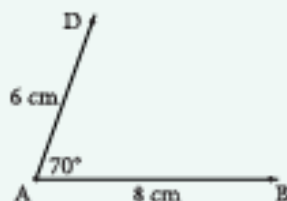
Пример 1

Една од патеките во паркот има форма на паралелограм. Должината на едната страна на патеката е 8 метри, а на соседната страна е 6 метри. Остриот агол што го зафаќаат страните е 70° . Нацртај ја патеката со користење размер. Кои се карактеристиките на паралелограмот што ќе ги користиш за да го нацрташ?

Решение:

Цртање паралелограм - паралелограмот треба да има два пара спротивни страни кои се паралелни. Во чекори (користен е размер):

- 1) Цртаме две страни со дадените должини кои зафаќаат агол од 70° и означени темиња A, B, D.
- 2) Повлекуваме од точката B паралелна полуправа со AD.
- 3) Повлекуваме од точката D паралелна полуправа со AB.
- 4) Во пресекот на двете полуправи означуваме точка C како четврто теме на паралелограмот.

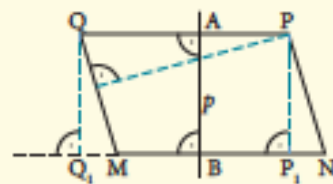


Пример 2

Нацртај висина на паралелограм.

Решение:

Во паралелограмот MNPQ е нацртана права p нормална на спротивните страни MN и PQ. Отсечката AB од нормалата p на тие страни се нарекува висина на паралелограмот. Висини се и отсечките QQ₁ и PP₁, односно растојанието меѓу паралелните страни е секаде еднакво.



Другата висина на паралелограмот го определува растојанието меѓу другиот пар паралелни страни MQ и PN (како на пример нормалата повлечена од темето P кон страната QM).

Висина на паралелограмот е отсечката повлечена од едно теме на паралелограмот под прав агол кон спротивната страна. Должината на оваа отсечка е еднаква на растојанието меѓу паралелните страни.

Задача 1

Колку висини од едно теме можат да се повлечат кај паралелограм? Нацртај произволен паралелограм. Повлечи ги висините од едно теме.

Бидејќи паралелограмот е четириаголник, збирот на внатрешните агли, како и збирот на надворешните агли е 360° .

Пример 3

Нацртај повеќе различни паралелограми. Во секој од нив повлечи една од дијагоналите (помалата или поголемата). Исеци ги паралелограмите. Потоа секој паралелограм пресечи го по дијагоналата што си ја повлекол.

- Какви се триаголниците што се добиваат кога паралелограмот ќе го пресечеме по една дијагонала?
- Какви се спротивните страни на паралелограмот?
- Какви се спротивните агли на паралелограмот?
- Какви се соседните агли на паралелограмот?

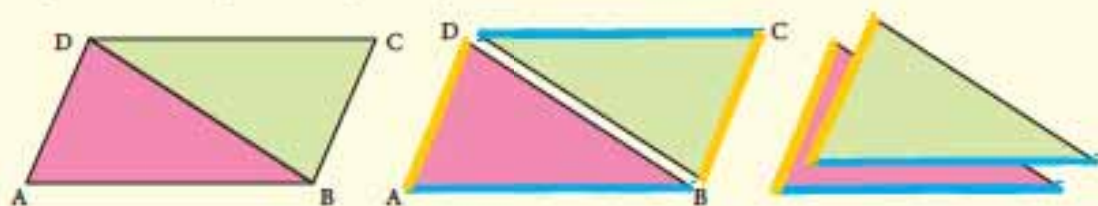
Решение:

- Кога паралелограмот ќе се пресече по една дијагонала, се добиваат два триаголници со иста форма и големина.

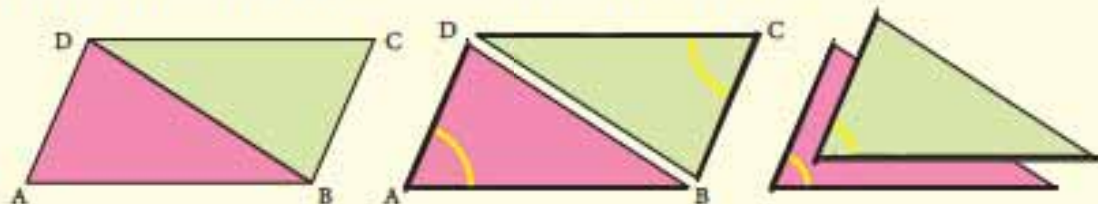


Секоја дијагонала го дели паралелограмот на два триаголници со иста форма и големина.

б) Спротивните страни на паралелограмите се еднакви по должина.



в) Спротивните агли на паралелограмот се еднакви по големина.



Во секој паралелограм спротивните страни се еднакви по должина.
Во секој паралелограм спротивните агли се еднакви по големина.

г) Какви се соседните агли на паралелограмот?
За паралелограмот ABCD од цртежот е дадено дека $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. Бидејќи агли α и δ се спротивни на трансверзалата AD (која ги сече паралелните прави AB и CD), тие се суплементни агли, односно $\alpha + \delta = 180^\circ$ (ова може да се покаже и за секои два соседни агли).



Во секој паралелограм соседните агли се суплементни.

Задача 2

Збирот на два спротивни агли од паралелограмот е 158° . Пресметај ги аглиите во паралелограмот.

Пример 4

Нацртај повеќе различни паралелограми.
Во секој паралелограм повлечи ги двете дијагонали
како на цртежот и пресечната точка означи ја со S.
Пресечи ги по дијагонали.



- Кои парови триаголници се еднакви по форма и големина?
- Спореди ги должините на AS и SC, и BS и SD?
- Што можеш да заклучиш?

Решение:

- Кога ќе се пресече секој паралелограм по дијагоналите, се добиваат четири триаголници.
Паровите триаголници кои се еднакви по форма и големина се: $\triangle ASB$ и $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ и $\triangle BSC$, според цртежот.
- $\overline{AS} = \overline{SC}$ и $\overline{BS} = \overline{SD}$.
- Дијагоналите на паралелограмот се сечат во точката S и таа е нивна средишна точка.

Дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат со пресечната точка.

Задача 3

Во паралелограмот MNPQ пресечната точка на дијагоналите е точката S. Одреди ја должината на дијагоналите ако $\overline{SP} = 8,5 \text{ cm}$ и $\overline{SQ} = 5,7 \text{ cm}$.

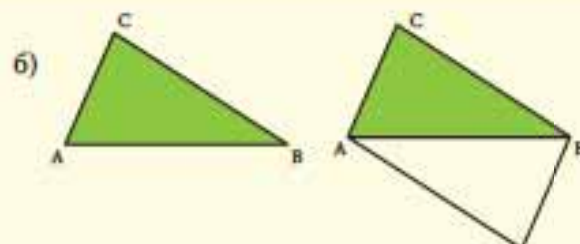
Пример 5

Валбона имала приврзок во форма на триаголник. Таа го однела приврзокот на златар бидејќи сакала да го дополни до форма на паралелограм.

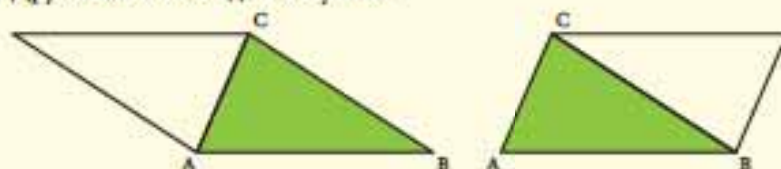
- Конструирај го приврзокот користејќи ги информациите за триаголникот ABC, $\overline{AB} = 2,5 \text{ cm}$ и $\overline{AC} = 1,5 \text{ cm}$ и аголот меѓу нив 60° .
- Дополни го добиениот цртеж до паралелограм.
- Колку различни дополнувања може да се направат?

Решение:

- Ако е потребно, потсети се од лекцијата „Конструкција на триаголник“ за чекорите на конструкција на триаголник кога се дадени две страни и аголот меѓу нив.

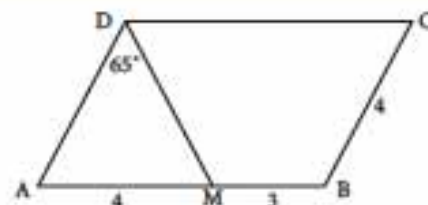


в) Други начини на дополнување

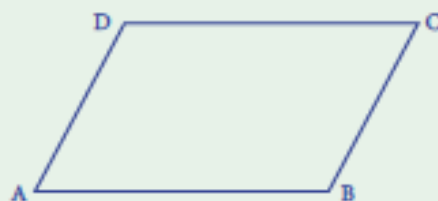


Задача 4

На цртежот е даден паралелограмот ABCD.
Опреди ги аглиите и страните на ABCD.



Дали паралелограмот ABCD е осносиметрична 2Д-форма?
Објасни го твојот одговор.



Одговори на прашањата во твојата тетратка.

За прашањето/ата со одговор ДА запиши објаснување и пример, а за прашањето/ата со НЕ врати се на лекцијата и разгледај го соодветниот пример на прашањето.

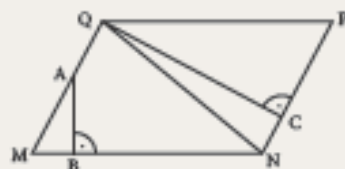
1. Мојам да ги набројам својствата на паралелограмот. ДА/НЕ
2. Мојам да ги применам својствата на паралелограм во решавање проблеми. ДА/НЕ
3. Како да ги подобрам моите знаења за својствата на паралелограмот?

Самостојна работа

1. Четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

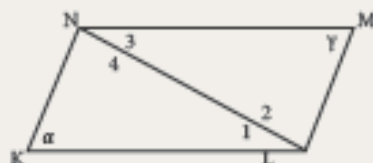
Именувај која од нацртаните отсечки е:

- негова дијагонала
- негова висина

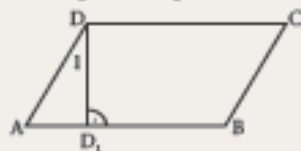


2. Нацртај паралелограм $ABCD$, а потоа од темето D повлечи ги висините.

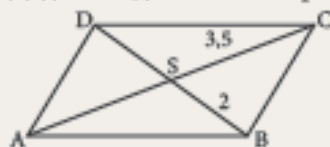
3. Во паралелограмот $KLMN$ на цртежот е повлечена дијагоналата. Што може да се заклучи за $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$? Објасни го твојот одговор.



4. Во паралелограмот $ABCD$, $\angle 1 = 42^\circ$. Пресметај ги аглиите на тој паралелограм.

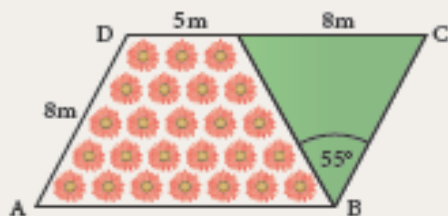


5. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Најди ги должините на дијагоналите. Дадените должини се претставени во cm .



6. Аголот во темето M на паралелограмот $MNPQ$ е 106° . Определи ги другите агли на паралелограмот.

7. Пејзажен архитект сака да уреди дворно место во форма на паралелограм кое е поделено на два дела: цвекарник во форма на трапез и триаголен тревник. Дворот треба да се загради со ограда. За таа цел, потребни се должините на страните и големините на аглиите на дворот. Користејќи го цртежот, определи ги бараните должини и агли.



- 8.* Во паралелограм $MNPQ$ ($\angle Q > 90^\circ$) се повлечени висините кон страните MN и NP . Пресметај ги аглиите на паралелограмот ако аголот меѓу повлечените висини е:

- 80°
- 45°

Видови паралелограми и нивните својства

Паралелограмот е четириаголник со два пара паралелни страни. Оваа 2Д-форма е основна за разбирање многу други геометриски концепти и има широка примена во реалниот живот, како и во различни области на науката и технологијата.

Во оваа лекција ќе се запознаеш со различните видови паралелограми. Секој од паралелограмите има свои карактеристики и својства со кои се разликува од другите, но сите тие ги делат основните својства на паралелограмот. На пример, спротивните страни секогаш се паралелни и еднакви, а спротивните агли се исто така еднакви.

Во текот на оваа лекција ќе ги истражиме видовите паралелограми и ќе ги запишеме нивните специфични својства. Ќе научиш како да ги разликуваш паралелограмите од другите 2Д-форми и како може да се применат нивните својства во решавање задачи и проблеми.



Пример 1

Анализирај го секој цртеж одделно и одговори на прашањата:

Две прави $a \parallel b$ се сечат со други две паралелни прави $c \parallel d$, но така што $a \perp c$	
Две прави $a \parallel b$ се сечат со други две паралелни прави $c \parallel d$, но растојанието меѓу a и b е еднакво со растојанието меѓу c и d	
Две прави $a \parallel b$ се сечат со други две паралелни прави $c \parallel d$, $a \perp c$ и растојанието меѓу c и d е еднакво со растојанието меѓу a и b	

- а) Дали четириаголниците се паралелограми? Зошто?
- б) Какви агли има секој од паралелограмите?
- в) Какви страни има секој од паралелограмите?

Решение:

Четириаголникот во првиот цртеж е паралелограм, има два пара паралелни страни и секој пар на паралелни страни имаат еднаква должина. Сите агли се прави агли.

Паралелограм во кој сите агли се прави се нарекува правоаголник.

Четириаголникот во вториот цртеж е паралелограм, има два пара паралелни страни и спротивните агли му се еднакви. Кај овој паралелограм сите страни се еднакви.

Паралелограмот во кој сите страни се еднакви се вика ромб.

Четириаголникот е паралелограм, има два пара паралелни страни и сите агли се прави агли. Сите страни се еднакви по должина.

Паралелограмот со еднакви страни и прави агли се вика квадрат.

Често паралелограмот што не е правоаголник и не е ромб го нарекуваме ромбоид.

Задача 1

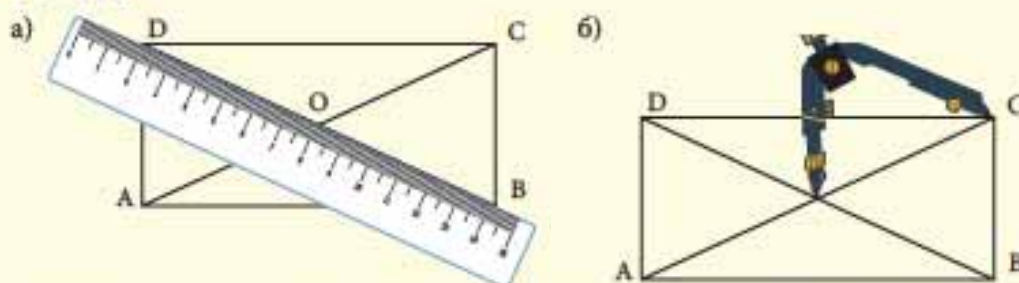
Нека точките P, Q, R и S на паралелограмот ABCD се средини на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Направи цртеж, анализирај го и одговори од кој вид е четириаголникот PQRS.

Пример 2

Цртај во твојата тетратка според следните чекори:

1. Нацртај три различни правоаголници.
2. Во секој правоаголник повлечи ги дијагоналите и пресечната точка означи ја со O.
 - а) Измери ја должината на дијагоналите во секој правоаголник и запиши ја. Што може да се заклучи?
 - б) Врвот од шестарот стави го во пресечната точка на дијагоналите кај секој правоаголник и отворај го до едно од темињата. Каква кружница можеш да нацрташ?
 - в) Дали ако еден паралелограм има еднакви дијагонали, може да заклучиш дека тој е правоаголник? Објасни го твојот одговор.

Решение:



Доколку црташе прецизно и точно, ќе ги добиеш следните својства на правоаголникот:

Во кој било правоаголник двете негови дијагонали се еднакви меѓу себе. Околу секој правоаголник може да се опише кружница со центар во пресекот на дијагоналите.

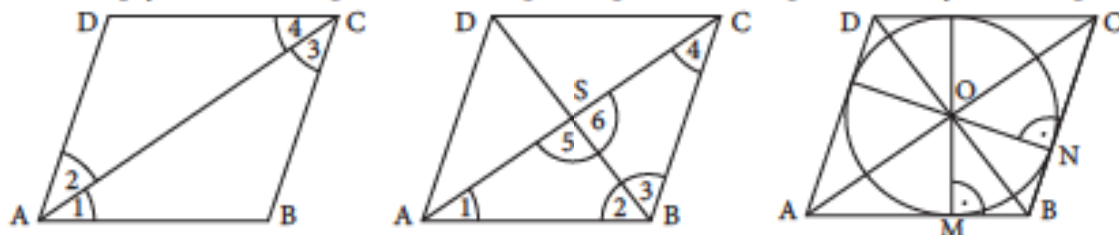
Ако дијагоналите на еден паралелограм се еднакви, тогаш тој паралелограм е правоаголник.

Задача 2

Дали правоаголникот е осносиметрична 2Д-форма? Објасни го твојот одговор.

Пример 3

Анализирај ги следните цртежи и одговори на прашањата поврзани со својствата на ромбот:



- а) Зошто $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$? Што претставува дијагоналата AC за $\angle A$ и $\angle C$? Дали истото може да се заклучи и за другата дијагонала?

Дијагоналите на ромб се симетрали на спротивните агли.

- б) Зошто $\triangle ABS$ и $\triangle CBS$ имаат еднаква форма и големина? Запиши ги паровите агли што се еднакви меѓу себе. Колку е збирот на $\angle 5$ и $\angle 6$? Зошто $\angle 5$ и $\angle 6$ имаат по 90° ? Каков агол зафаќаат дијагоналите AC и BD?

Во секој ромб дијагоналите се заемно нормални.

в) Дали ромбот е осносиметрична 2Д-форма? Објасни го својот одговор.

Секој ромб е осносиметрична 2Д-форма со две оски на симетрија, и тоа симетралите на спротивните агли.

г) Потсети се за впишана кружница на триаголник. Со помош на третиот цртеж даден погоре објасни зошто може да се впише кружница во ромб.

Во секој ромб може да се впише кружница чиј центар е во пресекот на дијагоналите.

Задача 3

Ако во еден паралелограм дијагоналите се заемно нормални, тогаш тој е ромб. Објасни зошто.

Ако во еден паралелограм дијагоналите се заемно нормални, тогаш тој е ромб.

Бидејќи секој квадрат е правоаголник со еднакви страни (или ромб со прави агли), сите својства што важат за правоаголниците и ромбовите важат и за квадратите.

Задача 4

Нацртај квадрат и повлечи ги неговите дијагонали. Потоа направи ги потребните мерења и провери го претходниот заклучок дека за квадратот важат сите својства како за правоаголник и за ромб.

Во секој квадрат дијагоналите се еднакви и заемно нормални.

Пример 4

Ана и Бојан сакаат да направат рамка за слика со димензии 40 cm и 30 cm. Тие имаат само дрвени стапчиња кои можат да ги сечат и сакаат да се осигурат дека рамката ќе биде правоаголна. Како можат да проверат дали нивната рамка е правилно составена користејќи ги својствата на паралелограмите?



Решение:

Ана и Бојан прво составуваат рамка со димензии 40 cm и 30 cm, така што двете подолги страни се паралелни и еднакви, а двете пократки страни меѓу себе се паралелни и еднакви. За да проверат дали рамката е правоаголник, тие ќе ги повлечат дијагоналите од спротивните агли (од горниот лев до долниот десен агол и од горниот десен до долниот лев агол).

Потоа, со линијар ќе ги измерат дијагоналите.

Ако дијагоналите се еднакви, тогаш рамката е правоаголник.

Ако дијагоналите не се еднакви, тоа значи дека рамката е искривена и треба да ја коригираат, така што страните повторно ќе бидат паралелни и со еднаква должина.

Овој метод може да се користи не само за изработка на рамки, туку и за проверка на исправноста на прозорци, врати, маси или други правоаголни објекти во секојдневниот живот.

Задача 5

Нацртај квадрат ABCD. Повлечи ги дијагоналите и симетралите на страните.

- Што се случува со пресекот на дијагоналите и пресекот на симетралите на страните?
- Стави го врвот на шестарот во пресекот на дијагоналите. Колку кружници може да нацрташ? Именувај ја секоја кружница и означи ги нејзиниот центар и радиус.

Секој квадрат има впишана и опишана кружница со заеднички центар (пресекот на дијагоналите).

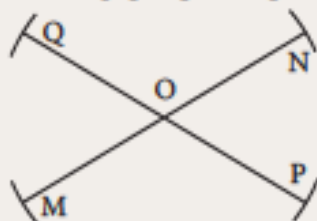
Дали квадратот е осносиметрична 2Д-форма? Објасни го твојот одговор.

Одговори во твојата тетратка на следниве прашања за да процениш колку си го совладал материјалот од лекцијата:

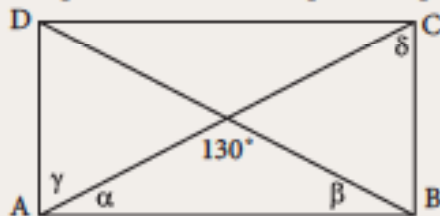
- Дали можам да ги препознам и именувам сите видови паралелограми (правоаголник, квадрат, ромб, ромбоид)?
- Дали можам точно да ги опишам нивните својства (еднакви страни, агли, дијагонали)?
- Дали можам да објаснам како се разликуваат правоаголникот, квадратот, ромбот и ромбоидот?
- Дали можам да решавам проблеми во кои се користат својствата на паралелограмите? Твојот одговор дополни го со пример или цртеж. Сподели ги одговорите со своите соученици.

Самостојна работа

- Во ромбот $ABCD$ точките A_1, B_1, C_1 и D_1 се средини на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Каков паралелограм се добива со поврзување на овие точки?
- а) Што е правоаголник?
б) Што е ромб?
- Отсечките MN и PQ на цртежот се еднакви. Тие се преполовуваат во пресечната точка O и го формираат паралелограмот $MPNQ$. Дали тој е правоаголник? Зошто?



- Напиши ги заедничките својства на квадратите и ромбовите.
- За правоаголникот од цртежот пресметај ги означените агли.



- Наброј ги заедничките својства на квадрат и правоаголник. По кои својства тие се разликуваат?
- Во ромбот $ABCD$ аголот меѓу помалата дијагонала и страната е 56° . Пресметај ги аглиите на ромбот.
- * Во столарска работилница изработуваат парче мебел од дрво – држач за телевизор. Држачот треба да е во форма на ромб чија пократка дијагонала е еднаква на страната на ромбот. За поголема функционалност на држачот, треба да се стави друго парче во форма на круг кој ќе ја допира секоја од страните на ромбот. Направи цртеж со кој целосно ќе го прикажеш дизајнот на држачот. Определи ги аглиите на ромбот.

Осна симетрија во координатен систем

Осната симетрија е пресликување во рамнината кога една форма според дадено правило се пресликува преку права наречена оска на симетрија, така што оригиналот и сликата изгледаат идентично, како огледална слика. Со оваа лекција ќе научиш како да ја одредиш положбата на 2Д-форма во координатен систем и како да ги споредиш сликата и оригиналот при пресликувањето. Исто така, ќе решаваш интересни проблеми за осна симетрија, што ќе ти помогне да разбереш како се користи оваа појава во секојдневниот живот, уметноста и науката.

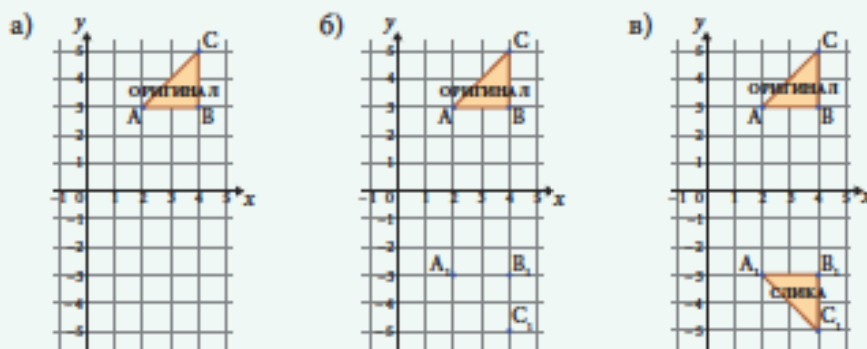


Пример 1

Нацртај координатен систем и постапи според следните барања:

- Нацртај го $\triangle ABC$ во координатниот систем. Темињата имаат координати $A(2, 3)$, $B(4, 3)$ и $C(4, 5)$.
- Одреди ги точките A_1 , B_1 и C_1 симетрични на темињата A , B и C на триаголникот во однос на x -оската.
- Кои се координатите на триаголникот $A_1B_1C_1$?

Решение:



- в) Координатите на темињата на сликата на триаголникот ABC се: $A_1(2, -3)$; $B_1(4, -3)$ и $C_1(4, -5)$.

Задача 1

Нацртај координатен систем и постапи според следните барања:

- Нацртај го правоаголникот $PQRS$ во координатниот систем, чии темиња имаат координати: $P(-3, 1)$, $Q(-3, 4)$, $R(-6, 4)$ и $S(-6, 1)$.

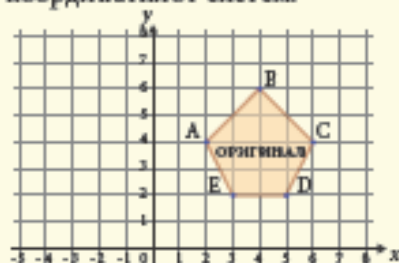
- б) Нацртај ја сликата на правоаголникот PQRS при осна симетрија со оска на симетрија y -оската.
- в) Одреди ги координатите на темињата на новиот правоаголник $P_1Q_1R_1S_1$.

Пример 2

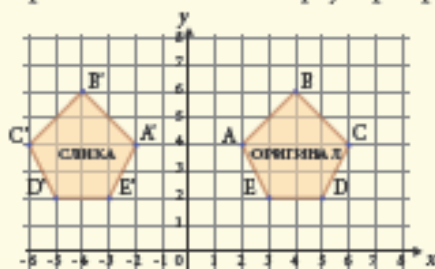
- а) Нацртај го петаголникот во координатниот систем ако неговите темиња се: $A(2, 4)$, $B(4, 6)$, $C(6, 4)$, $D(5, 2)$, $E(3, 2)$.
- б) Одреди ја сликата на петаголникот ABCDE при осна симетрија со оска на симетрија y -оската. Запиши ги координатите на сликата на секое теме од петаголникот ABCDE.

Решение:

- а) Почни со внесување на координатите на секое теме на петаголникот ABCDE во координатниот систем:



- б) Примена на осна симетрија врз оригиналот



Новите координати на темињата се:

$A(2, 4) \rightarrow A'(-2, 4)$, $B(4, 6) \rightarrow B'(-4, 6)$, $C(6, 4) \rightarrow C'(-6, 4)$, $D(5, 2) \rightarrow D'(-5, 2)$ и $E(3, 2) \rightarrow E'(-3, 2)$

Сликата на петаголникот е симетрична на оригиналот во однос на y -оската, што значи дека координатата на x за секое теме ќе се смени со нејзината спротивна вредност (ако е позитивна, ќе стане негативна и обратно), додека координатата на y ќе остане непроменета.

При оваа осна симетрија сликите на темиња на петаголникот се на спротивната страна на y -оската, но на исто растојание од неа.

Прашања за дополнително размислување:

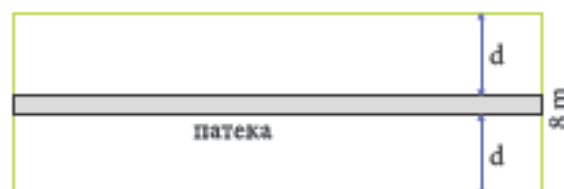
- а) Што ќе се случи со петаголникот ABCDE при осна симетрија со оска на симетрија x -оската?
- б) Какви промени ќе се направат на координатите на петаголникот ако оската на симетрија е правата која минува низ точката $E(0, 1)$ и е паралелна на x -оската?

Задача 2

- Нацртај го шестаголникот ABCDEF во координатниот систем, со координати: A(2, 6), B(4, 7), C(6, 5), D(5, 3), E(3, 3), F(2, 4).
- Одреди ја сликата на шестаголникот ABCDEF при осна симетрија со оска на симетрија y -оската. Запиши ги координатите на сликата на секое теме од шестаголникот ABCDEF.
- Какви промени настануваат на координатите на сликата на шестаголникот?
- * Без да црташ, обиди се да одговориш кои би биле x -координатите на секое теме на сликата на шестаголникот ABCDEF при осна симетрија во однос на правата која минува низ точката F(-3, 0) и е паралелна на y -оската.

Пример 3

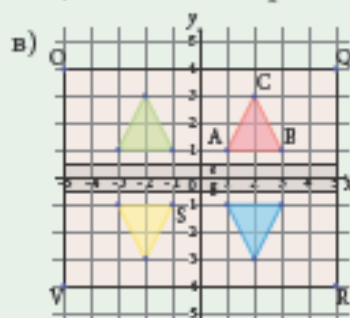
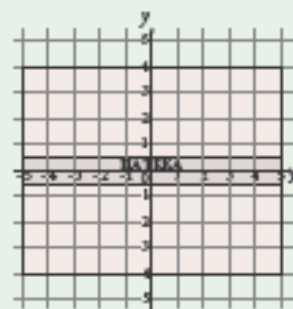
Ти си архитект кој треба да изработи план за уредување двор со симетричен дизајн. Во дворот треба да се постават четири големи цветни леи во форма на триаголници. Леите се распоредени симетрично во однос на патеката во дворот.



- Која оска од координатниот систем би ја избрал според патеката на дадениот цртеж?
- Избери ги координатите на темињата на една од цветните леи во форма на триаголник.
- Нацртај го дворот со симетричен дизајн.

Решение:

- Најдобро и наједноставно за цртање би било ако избереме x -оската на координатниот систем да се совпаѓа со патеката која е дадена на цртежот. Меѓутоа, во дворот x -оската треба да биде на средината од патеката. Зошто? На што ќе внимаваш при цртање на y -оската? Колку е долга патеката?
- Првата цветна леа нека биде во првиот квадрант, триаголник ABC со координати A(1, 1), B(3, 1) и C(2, 3). На што треба да внимаваш при изборот на координатите на темињата на триаголникот? Кои се најголемата и најмалата можна вредност на x и y -координатите на едно теме од цветната леа во првиот квадрант? Објасни го твојот одговор.



Задача 3

Вера сака да постави четири огледала на еден ѕид во својот козметички салон. Притоа треба да се исполнети следните услови:

1. Огледалата да имаат форма на квадрат.
 2. Дијагоналата на едно од огледалата треба да биде нормална на работ од подот.
 3. На друго огледало страната да му е паралелна со работ од подот.
- а) Направи свој распоред на огледалата во координатниот систем со користење осна симетрија.
- б) Како можеш да добиеш композиција на огледалата, така што, на пример, во прв и втор квадрант од координатниот систем се огледалата чија дијагонала е нормална на x -оската, а во трет и четврти квадрант се огледалата чија страна е паралелна на x -оската.

Како можеш да ја користиш осната симетрија за да решиш реални проблеми? Дали можеш да наведеш конкретен пример од секојдневниот живот каде што симетријата игра важна улога?

Одговорите на секое прашање запиши ги во твојата тетратка. За твојот одговор запиши пример ако си одговорил со ДА, а за одговорите Делумно и Не објасни зошто.

1. Дали можам точно да ги прочитам координатите на точка по симетрија во однос на дадена оска?
☐ Да ☐ Делумно ☐ Не
2. Дали можам да ја одредам сликата при осна симетрија на многуаголник во координатниот систем?
☐ Да ☐ Делумно ☐ Не
3. Дали разбираам како да применам осна симетрија во реални ситуации (како во примерот со позиционирање на огледалата и сл.)?
☐ Да ☐ Делумно ☐ Не
4. Што можам да направам за подобро да го совладам материјалот?
 (Напиши краток одговор.)

Самостојна работа

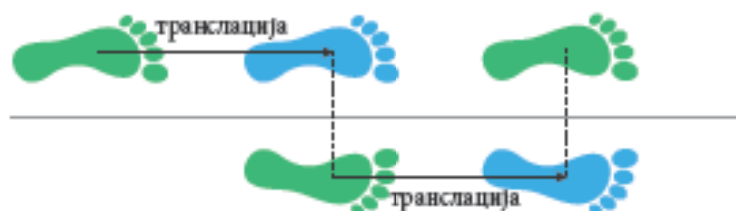
1. Градскиот парк има правоаголен базен чии димензии се дадени во координатен систем. Темињата на базенот се $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, -1)$ и $D(2, -1)$. Планирај цветен аранжман симетричен на базенот во однос на y -оската и одреди ги координатите на цветниот аранжман.
2. Во изработката на постер за настан треба да се дизајнира симетричен елемент во форма на триаголник со темиња $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(2, 1)$. Нацртај го триаголникот и неговата слика по симетрија во однос на x -оската.
3. Ако со точките $A(3, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, -1)$ и $D(3, -1)$ е определена положбата на огледалото, одреди ги координатите на неговата слика при осна симетрија во однос на правата која минува низ точката $M(0, -3)$ и е паралелна на x -оската.
- 4.* Градината има централен цветен аранжман во форма на круг чиј центар е во точката $(4, 2)$, а радиусот е 2 единици. Планирај симетричен круг во однос на x -оската, запиши ги координатите на центарот и опиши ја новата позиција.
5. Прозорецот има форма на квадрат со темиња $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$ и $D(1, 3)$. Најди ги координатите на неговата слика по осна симетрија во однос на правата која минува низ точката $K(2, 0)$ и е паралелна на y -оската.
6. Подот на бањата е претставен со координатен систем. Ако една плочка е правоаголник со темиња $A(-2, -1)$, $B(0, -1)$, $C(0, -3)$ и $D(-2, -3)$, одреди ги координатите на симетричната плочка во однос на y -оската.
- 7*. При реставрација на под во антички објект археолозите забележале дека се користени плочки чиј дезен е симетричен по однос на двете заемно нормални прави кои се дадени на цртежот. Тие треба да го откријат почетниот дезен на плочката, но делови од неа се скришени или избришани. Користи го цртежот и помогни им на археолозите да го нацртаат почетниот дезен на плочките кои биле користени многу одамна.



Транслација во координатен систем

Транслацијата е поместување на 2Д-форма без да се менува нејзината форма или големина. При транслација, секоја точка од 2Д-формата се поместува во иста насока и за исто растојание.

Целта на оваа лекција е да научиш како да ги одредуваш новите координати на точките на многуаголникот со транслација, да ги разликуваш оригиналот и сликата на многуаголниците и да решаваеш математички проблеми кои вклучуваат транслација.

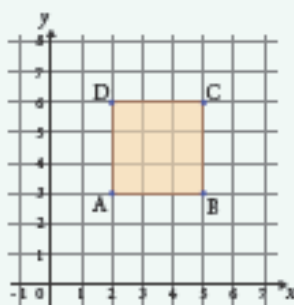


Пример 1

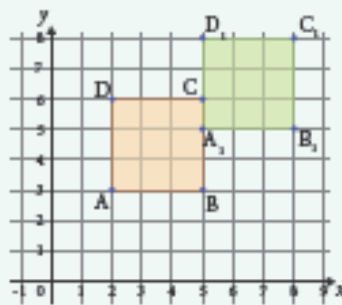
- Во координатниот систем нацртај многуаголник со темиња $A(2, 3)$, $B(5, 3)$, $C(5, 6)$ и $D(2, 6)$.
- Изврши транслација на овој многуаголник така што секоја точка ќе се помести за 3 единици по оската x надесно и 2 единици по оската y нагоре.
- Одреди ги координатите на темињата на сликата по транслацијата.

Решение:

а)



б)



- в) Од координатниот систем може да ги прочиташ темињата на сликата на многуаголникот $ABCD$: $A_1(5, 5)$, $B_1(8, 5)$, $C_1(8, 8)$, $D_1(5, 8)$

Задача 1

Во координатниот систем е даден петаголник со следниве координати на темињата: $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(5, 5)$, $D(3, 7)$, $E(1, 6)$. Изврши транслација на петаголникот така што секоја точка ќе се помести за 4 единици надесно и 3 единици надолу. Кои ќе бидат новите координати на темињата на добиениот петаголник по транслацијата?

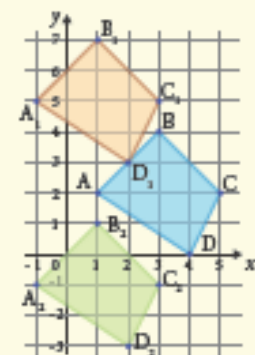
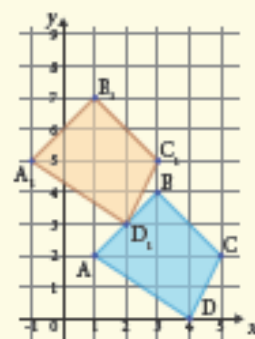
Пример 2

Даден е многуаголник во координатен систем со следниве координати на темињата: $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$ и $D(4, 0)$. Изврши транслација на овој многуаголник така што секоја точка ќе се помести за 2 единици налево и 3 единици нагоре.

- Одреди ги координатите на темињата на сликата на многуаголникот $ABCD$ по транслацијата.
- Опиши ја промената на координатите на секоја точка (оригиналот и сликата). Кои се разликите помеѓу координатите на оригиналот и на сликата?
- Како би се промениле координатите ако транслацијата беше направена во спротивна насока (на пример, 2 единици налево и 3 единици надолу)? Направи ја новата транслација и одреди ги координатите.
- Наместо да ги читаш координатите на темињата на сликата на многуаголникот $ABCD$, напиши како ќе ги пресметаш за транслација 2 единици налево и 3 единици надолу.
- Објасни го значењето на зборовите „оригинал“ и „слика“ во контекст на транслацијата. Како ги идентификуваш овие поими на координатниот систем?
- Реши го следниов проблем со транслација: Доколку имаш други точки $P(2, 3)$ и $Q(5, 6)$, а транслацијата треба да биде за 1 единица надесно и 4 единици нагоре, кои ќе бидат координатите на добиените точки?

Решение:

- Од координатниот систем може да ги прочиташ координатите на сликата на многуаголникот $ABCD$ при транслација 2 единици налево и 3 единици нагоре: $A_1(-1, 5)$; $B_1(1, 7)$; $C_1(3, 5)$; $D_1(2, 3)$.
- Промената на координатите на секоја точка е во додавање 2 единици налево и 3 единици нагоре. На пример: за точката $A(1, 2)$, новата точка $A_1(-1, 5)$ има координата што се намалува за 2 по оската x и се зголемува за 3 по оската y . Истата промена се случува за сите точки на многуаголникот.
- Ако транслацијата е за 2 единици налево и 3 единици надолу, x -координатите на сликата би биле исти како во првата транслација, но во овој случај y -координатата на секоја точка не се зголемува, туку се намалува за 3, односно: $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$ и $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.
- Бидејќи во овој случај транслацијата на многуаголникот $ABCD$ е за 2 единици налево и 3 единици надолу, имаме: x -координатите на темињата на многуаголникот $A_2B_2C_2D_2$ се за 2 единици помали од x -координатите на многуаголникот $ABCD$, а y -координатите на многуаголникот $A_2B_2C_2D_2$ се за 3 единици помали од y -координатите на оригиналот. Односно, $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$; $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.



д) Во контекст на транслацијата:

Оригинал: Многуаголникот ги има координатите на темињата пред да се примени транслацијата. Тие претставуваат почетна позиција на многуаголникот во координатниот систем.

Слика: Нов многуаголник со нови координати на темињата по транслацијата, кога многуаголникот е преместен на нова позиција. Сликата ја покажува позицијата на многуаголникот по транслацијата.

Во координатниот систем оригиналот е прикажан со точките на почетната позиција, а сликата со точките на новата позиција, по извршување на транслацијата.

ф) Транслацијата на точките $P(2, 3)$ и $Q(5, 6)$ за 1 единица надесно и 4 единици нагоре ќе ги даде новите координати: $P(2, 3) \rightarrow P_1(3, 7)$ и $Q(5, 6) \rightarrow Q_1(6, 10)$ Објасни како се добиени координатите на P_1 и Q_1 .

Задача 2

Даден е шестаголник со координати на неговите темиња: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, 2)$, $D(7, 4)$, $E(5, 6)$ и $F(3, 5)$. Транслацијата е зададена со 3 единици надесно и 2 единици надолу.

- Одреди ги координатите на темињата на сликата на шестаголникот по транслацијата.
- Објасни ја промената на координатите на секое теме (оригиналот и сликата) при транслацијата. Како се менуваат координатите на темињата по транслацијата?
- Измери ја со линијар должината на секоја страна на оригиналниот шестаголник, а потоа спореди ја со должината на соодветната страна на шестаголникот по транслацијата. Дали транслацијата го менува растојанието помеѓу точките?
- * Како би се промениле координатите ако транслацијата беше направена за 3 единици налево и 4 единици нагоре? Без да направиш транслација, определи кои ќе бидат координатите на темињата на сликата на оригиналот?

Пример 3

Ана работи во компанија за превоз на пакети. Таа треба да ја пресмета новата локација на два пакети кои се наоѓаат на различни позиции во магацинот. Кога добива нова пратка, таа треба да премести два пакета со истата транслација. Првичните позиции на пакетите се дадени со координатите: пакет 1: $A(2, 3)$ и пакет 2: $B(5, 4)$. Транслацијата што треба да се изврши е преместување за 6 единици надесно и 2 единици нагоре.

- Кои ќе бидат новите координати на пакетите по преместувањето?
- Објасни како се пресметуваат новите координати по транслацијата на пакетите.
- Што ќе се случи со растојанието помеѓу пакетите А и В пред и по транслацијата?

Решение:

а) Нови координати на пакетите: За да ги добиеме новите координати на пакетите, треба на x -координатата да додадеме 6, а на y -координатата да додадеме 2. Ова е поради транслацијата за 6 единици надесно и 2 единици нагоре.

За пакет 1 од точката со координати $A(2, 3)$ по транслацијата ќе биде во точката $A_1(8, 5)$.
За пакет 2 од точката со координати $B(5, 4)$ по транслацијата ќе биде во точката $B_1(11, 6)$.

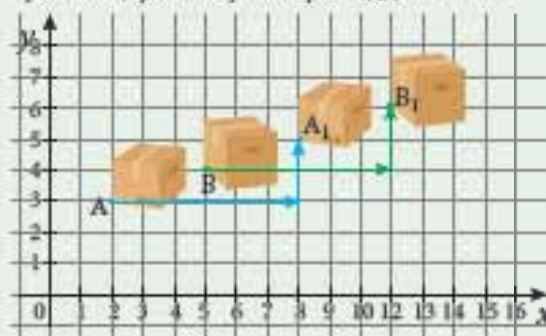
- б) Нови координати на пакетите A и B по транслацијата:

На x -координатата на секој пакет додаваме 3 (поради преместувањето по оската x , десно).

На y -координатата на секој пакет додаваме 2 (поради преместувањето по оската y , нагоре).

Овие промени се применуваат на секоја точка (пакет) за да се добие новата позиција по транслацијата.

- в) Растојанието помеѓу пакетите останува исто пред и по транслацијата бидејќи транслацијата не ја менува оддалеченоста помеѓу точките.



Транслагацијата на пакетите ја менува нивната позиција, но го задржува растојанието помеѓу нив.

Транслагацијата запазува растојанија.

Задача 3

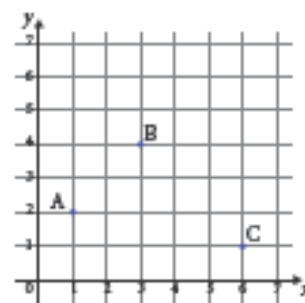
Тони, кој работи како менаџер на паркинг-гаража, треба да го пресмета новото распоредување на автомобилите по транслагација. Автомобилите што се во гаражата треба да се поместат за да се создаде повеќе слободен простор за нови возила.

Првични координати на автомобилите во гаражата:

Автомобил 1: $A(1, 2)$, Автомобил 2: $B(3, 4)$, Автомобил 3: $C(6, 1)$.

Тони треба да ги премести автомобилите за 2 единици надесно и 3 единици нагоре.

- а) Какви ќе бидат новите координати на автомобилите по извршување на транслагацијата?
б) Објасни како се пресметуваат новите координати на автомобилите.



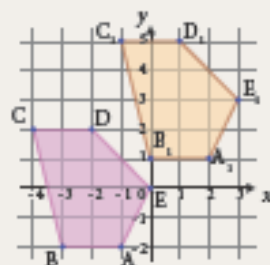
Како транслацијата на точките во координатниот систем влијае врз геометриските објекти како многуаголници или форми од секојдневниот живот? Објасни како може да се примени транслацијата на задачи кои вклучуваат распоредување или преместување на објекти, како што е преместување на автомобили во гаража или планирање распоред на мебел во просторија.

Одговори ги прашањата во твојата тетратка. Одговорот на секое прашање објасни го преку пример и сподели го со твоите соученици.

1. Дали јасно ги разбираам и применувам правилата за транслација во координатен систем?
2. Дали можам да ги определам новите координати на точки и геометриски фигури по транслација и да објаснам како се менуваат нивните положби?
3. Дали можам да ја објаснам разликата помеѓу транслација и осна симетрија?
4. Како ја применив транслацијата во решавањето практични проблеми?

Самостојна работа

1. Во координатниот систем се наоѓа триаголник со координати на темињата: $A(2, 3)$, $B(4, 6)$ и $C(6, 2)$. Ако овој триаголник се премести за 4 единици налево и 2 единици нагоре, кои ќе бидат новите координати на трите темиња на триаголникот?
2. Даден е квадрат во координатниот систем со координати на темињата: $A(1, 1)$, $B(1, 4)$, $C(4, 4)$, $D(4, 1)$. примени транслација за да го поместиш квадратот за 2 единици надесно и 3 единици надолу. Запиши ги новите координати на квадратот.
3. Дадена е права која минува низ точките $P(2, 4)$ и $Q(5, 8)$. Ако примениш транслација на оваа права за 2 единици налево и 2 единици нагоре, кои ќе бидат координатите на добиените точки P_1 и Q_1 ?
4. Дадена е сликата на паралелограмот со темињата: $A_1(0, 0)$, $B_1(4, 2)$, $C_1(5, 5)$, $D_1(1, 3)$ добиен со транслација на паралелограмот оригинал за 5 единици надесно и 1 единица нагоре. Запиши ги координатите на паралелограмот оригинал, пред транслацијата.
- 5.* а) Кои се координатите на оригиналот (розовиот многуаголник), а кои се координатите на сликата (портокаловиот многуаголник)?
 б) За колку е поместен многуаголникот по x -оската, а за колку по y -оската?



Ротација на многуаголници и примена

Ротацијата во дадена рамнина е една од основните геометриски трансформации што ја менува положбата на геометриските форми во даден координатен систем. Во оваа лекција ќе научиш како да ротираш многуаголник околу дадена точка за определен агол. Ќе се запознаеш со начинот на кој се определува новата позиција на темињата на многуаголникот и ќе забележиш како се менуваат неговите координати по ротацијата. Ќе ги истражуваш основните принципи на ротација, како што се аголот на ротација и насоката и ќе ги применуваш овие концепти за решавање практични проблеми од секојдневниот живот.

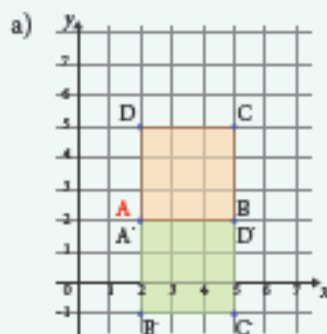


Пример 1

Даден е квадрат со координати на темињата: $A(2, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$ и $D(2, 5)$.

- Ротирај го квадратот за агол од 90° околу темето A во насока на движењето на стрелките на часовникот.
- Запиши ги координатите на квадратот $A'B'C'D'$, што е слика на квадратот $ABCD$ при дадената ротација.

Решение:



- Новиот квадрат (сликата) по ротацијата за 90° околу точката A има координати на темињата: $A'(2, 2)$, $B'(2, -1)$, $C'(5, -1)$ и $D'(5, 2)$.

Задача 1

Даден е петаголникот $ABCDE$ со координати: $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(4, 4)$, $D(2, 5)$ и $E(0, 4)$. Ротирај го петаголникот за 90° во насока спротивна на движењето на стрелките на часовникот околу темето $A(1, 2)$.

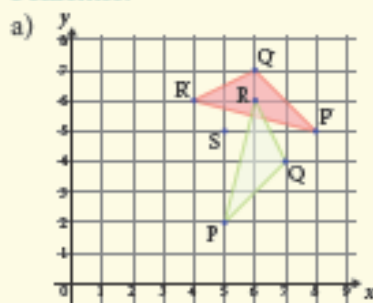
- Кои се координатите на новите точки B' , C' , D' и E' ?
- Каква е промената во положбата на петаголникот по ротацијата?
- Дали оригиналот и сликата имаат иста форма и големина? Објасни зошто.

Пример 2

Точките $P(5, 2)$, $Q(7, 4)$ и $R(6, 6)$ се темиња на $\triangle PQR$.

- Ротирај го $\triangle PQR$ околу точката $S(5, 5)$ за 90° во насока спротивна на движењето на стрелките на часовникот.
- Одреди ги новите координати на точките P' , Q' и R' по ротацијата околу точката S за 90° степени.
- Измери ја $\overline{PQ}$ и спореди ја со $\overline{P'Q'}$. Што забележуваш?
- Дали триаголникот ги задржува својата форма и големина по ротацијата? Објасни.
- Каква е положбата на новиот триаголник во однос на почетниот триаголник?

Решение:



- Триаголникот што е слика при ротацијата има темиња со координати: $P'(8, 5)$, $Q'(6, 7)$ и $R'(4, 6)$.
- Може да се забележи дека растојанието помеѓу точките P и Q е исто со растојанието помеѓу P' и Q' , односно $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$. Истото важи за останатите растојанија меѓу соодветните точки.
Ротацијата го запазува растојанието меѓу точките.
- Триаголникот ги задржува својата форма и големина. Ротацијата не ја менува должината на страните и не ги менува аглите на триаголникот. Се менува само неговата позиција во координатниот систем.
- Положбата на новиот триаголник е различна — зависи од аголот и насоката на ротација, но тој е идентичен по форма и големина со почетниот.

Задача 2

Даден е четириаголникот $ABCD$ со координати: $A(2, 3)$, $B(4, 3)$, $C(4, 5)$ и $D(2, 5)$. Ротирај го четириаголникот за 90° во насока на движењето на стрелките на часовникот околу точката $S(1, -1)$.

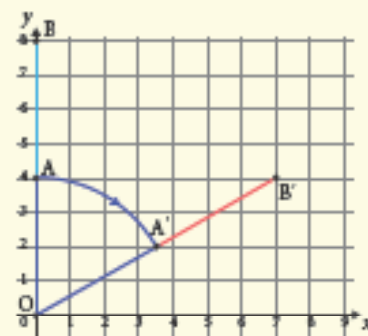
- Кои се координатите на темињата A' , B' , C' и D' по ротацијата на $ABCD$?
- Дали оригиналот и сликата се идентични по големина? Објасни зошто.

Пример 3

Отсечката AB ротирај ја за агол од 60° во насока на стрелките на часовникот околу точката $O(0,0)$. Кои се координатите на отсечката $A'B'$?

Решение:

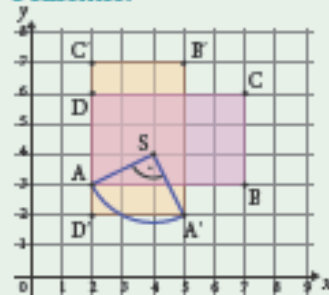
Прочитај ги и запиши ги координатите на крајните точки на сликата на отсечката AB по ротацијата.



Пример 4

Во планот за патека во градскиот парк архитектот ја има положбата на патеката во координатен систем. Патеката има форма на правоаголник со координати на темињата $A(2, 3)$, $B(7, 3)$, $C(7, 6)$ и $D(2, 6)$. Архитектот сака да ја ротира патеката за 90° во насока спротивна на движењето на стрелките на часовникот, околу точката $S(4, 4)$, за да создаде нов изглед на патеката. Одреди ги новите координати на темињата на патеката по ротацијата.

Решение:



Од цртежот може да се прочитаат координатите на новата патека: $A'(5, 2)$, $B'(5, 7)$, $C'(2, 7)$ и $D'(2, 2)$.

Како ротацијата на многуаголникот околу дадена точка влијае врз неговата форма и неговата големина? Дали при ротацијата сите темиња на многуаголникот се поместуваат еднакво и на истиот начин? Објасни што се случува со позициите на темињата на многуаголникот кога се ротираат за различни агли. Зошто е важно да се знае центарот на ротација кога се работи со ротација во природни или географски контексти? Истражувај.

Запиши во твојата тетратка: Дали си задоволен/а од разбирањето на чекорите на ротација? Објасни што можеш да направиш подобро следниот пат.

Самостојна работа

Со што е определена една ротација?

- Изврши ротација на $\triangle ABC$ со темиња $A(2, 3)$, $B(5, 5)$ и $C(4, 8)$ за агол од 90° во насока спротивна на движењето на стрелките на часовникот околу точката $S(4, 4)$.
 - Кои ќе бидат новите координати на темињата A' , B' и C' по ротацијата?
 - Како ќе се промени позицијата на триаголникот во однос на неговото почетно место?
- Даден е правоаголник со координати $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, 4)$ и $D(1, 4)$. Ротирај го правоаголникот за 180° околу точката која е пресек на дијагоналите на правоаголникот.
 - Одреди ги координатите на темињата на правоаголникот по ротацијата.
 - Каква е разликата во позицијата на правоаголникот пред и по ротацијата?
 - Како центарот на ротација што е пресек на дијагоналите влијае врз самата ротација?
- Даден е многуаголник со темиња $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$, $D(4, 0)$ и $E(2, 0)$. Ротирај го многуаголникот за 270° во спротивна насока од движењето на стрелките на часовникот околу точката $O(0, 0)$.
 - Одреди ги координатите на новите темиња A' , B' , C' , D' и E' по ротацијата.
 - Како оваа ротација влијае врз распоредот на точките во однос на почетната позиција на многуаголникот?
 - Колку често се користи ротација околу координатниот почеток во геометриски проблеми и во кои случаи? Истражувај.
- Триаголникот со координати на темињата $A(2, 3)$, $B(6, 4)$ и $C(5, 7)$ ротирај го за 30° во спротивна насока на движењето на стрелките на часовникот околу неговото тежиште.
 - Која ќе биде новата позиција на триаголникот по ротацијата? Одреди ги координатите на сликата на триаголникот.
 - Како ќе изгледа триаголникот по ротацијата во однос на неговата почетна положба?

Претставување 3Д-форми во различни проекции

Оваа лекција ќе ти помогне да научиш како да претставуваш тридимензионални форми (3Д-форми) гледани од различни страни. Претставувањето објекти во просторот е многу важно за да можеш да ги разбереш и анализираш различните перспективи на една форма. Ќе научиш како да гледаш и да црташ 3Д-форми од три различни позиции: однапред, одгоре и отстрана.



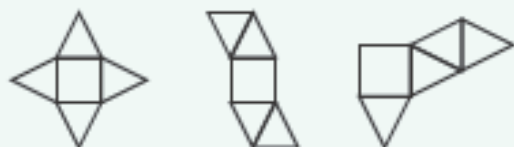
- Гледано однапред (фронтална проекција) – ова е како да ја гледаш формата од предната страна, што ти ги покажува висината и должината на објектот.
- Гледано одгоре (планска проекција) – ова е како да ја гледаш формата одгоре, што ти помага да ги видиш должината и ширината на објектот.
- Гледано отстрана (профилна проекција) – ова е како да ја гледаш формата отстрана, што ти ги покажува висината и ширината на објектот.

Ова знаење е основа за понатамошно учење и ќе ти биде корисно во различни области, како што се геометријата, архитектурата и инженерството.

Пример 1

Изработи мрежа на пирамида со основа квадрат.

Решение:

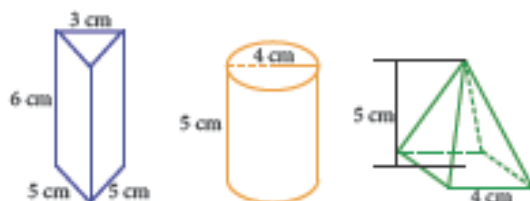


Во основа добивањето на 2Д-цртежите со кои претставуваме 3Д-форма гледана од различни страни (одгоре, однапред, отстрана) е еден вид пресликување, односно ортогонално проектирање. Ортогонална проекција на точка врз рамнина е пресекот на нормалата повлечена низ точката кон дадената рамнина.



Пример 2

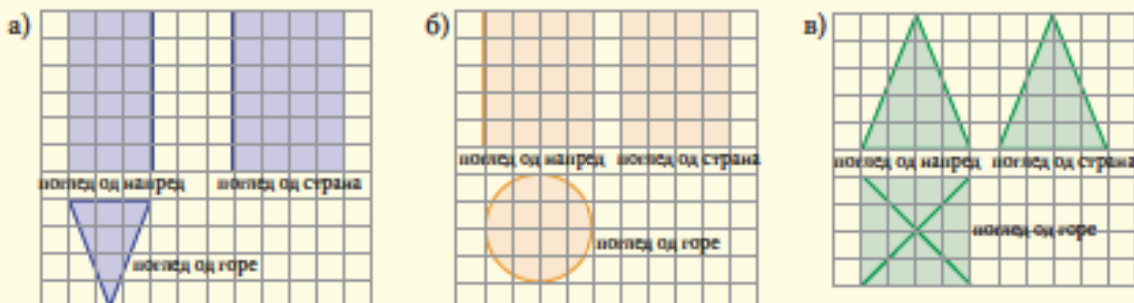
Дадени се три различни 3Д-форми: призма, цилиндар и пирамида. Твоја задача е да ги прикажеш овие форми од три различни позиции на гледање: одгоре, однапред и отстрана.



- Како изгледа призмата кога се гледа однапред, одгоре и отстрана?
- Како изгледа цилиндарот кога се гледа однапред, одгоре и отстрана?
- Како изгледа пирамидата кога се гледа однапред, одгоре и отстрана?

Решение:

На цртежите од овој пример должината од 1 cm е претставена со должина на 1 квадратче од квадратната мрежа.

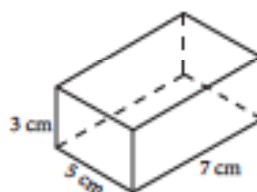
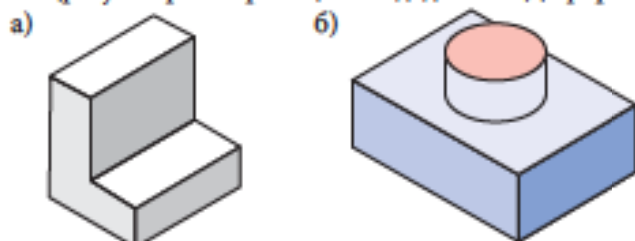


Задача 1

Нацртај ги трите проекции на квадратот даден на цртежот.

Задача 2

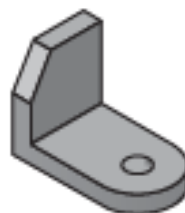
Нацртај ги трите проекции на дадената 3Д-форма.



Пример 3

Ти си машински инженер кој треба да испрати упатства до работилницата за изработка на елемент за поправка на некоја машина. Упатствата се состојат од цртежи во 3 проекции со цел прецизна изработка на бараниот машински елемент.

- Нацртај го делот во 3 проекции.
- Одговори во кои други области од секојдневниот живот, техника и наука има примена цртањето 3Д-форми во 3 проекции?

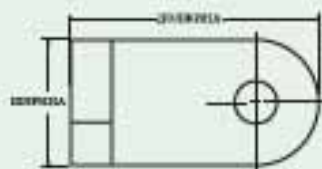


Решение:

Проекција што се добива при поглед одгоре или планот го добиваме кога го гледаме елементот (3Д-формата) одгоре и ја цртаме 2Д-формата што притоа се добива. Ова е прикажано на цртеж 1а. На цртеж 1б, пак, е дадена првата проекција (планот) на машинскиот елемент.

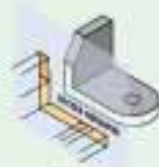


цртеж 1а

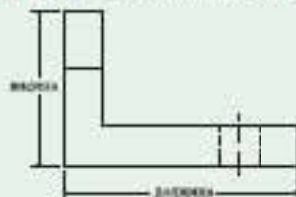


цртеж 1б

Проекцијата што се добива кога ја гледаме 3Д-формата однапред (фронтална проекција) се добива на начин како што е прикажано на цртеж 2.

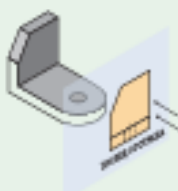


Цртеж 2а

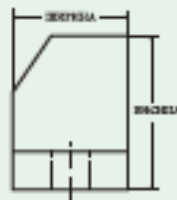


Цртеж 2б

Проекцијата што се добива кога ја гледаме 3Д-формата отстрана (профилна проекција) се добива на начин како што е прикажано на цртеж 3.



цртеж 3а



цртеж 3б

- 2) Цртањето 3Д-форми во 3 проекции има широка примена во секојдневниот живот, и тоа во архитектурата, градежништвото, машинството, уметноста.

Задача 3

Потребно е ново уредување на твојата училница. Нацртај го постојниот план на училницата, а потоа предложи нов внимавајќи на функционалноста на инвентарот во неа.

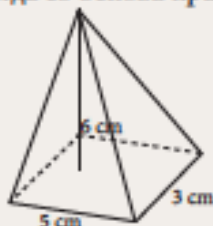
Дали трите проекции што се користат за претставување 3Д-форма секогаш треба да се цртаат во вистинска големина? Наведи неколку примери за да го објасниш твојот одговор.

1. Што научив за начинот на претставување на 3Д-формите?
2. Каде имам тешкотии во разбирањето или примената на тоа што го учев во оваа лекција?
3. Што можам да направам за да го подобрам своето разбирање?

Самостојна работа

1. Нацртај во три проекции:

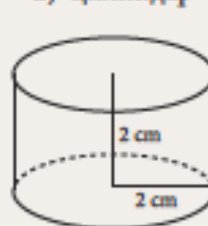
а) пирамида со основа правоаголник



б) конус



в) цилиндар



2. Нацртај ја во 3 проекции дадената 3Д-форма.



3. Нацртај ги во 3 проекции машинските делови:

а)



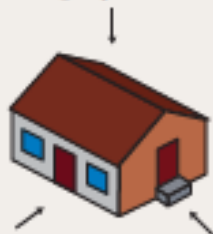
б)



в)



4. Нацртај го во 3 проекции објектот даден на сликата.



5. Нацртај план и една странична проекција на твојата соба. На цртежот претстави барем 3 елементи од мебелот.

Т Е М А

3

АЛГЕБРА

$$2 + 2 = ?$$



$$x - y = ?$$



Алгебрата е како игра со загатки – користиме букви и равенки за да откриеме кој број се крие зад нив.

Подготви се да откриваш, да пресметуваш и да размислуваш како вистински математичар.

„Математиката е кралица на науките, а алгебрата е кралица на математиката.“

„Алгебрата е како детективска приказна – бројките се траги, а буквите се тајните што треба да ги откриеме.“

Резултати од учењето

По изучувањето на оваа тема ќе бидеш способен/а да:

- составуваш алгебарски изрази и формули за решавање проблеми од секојдневен контекст;
- составуваш и решаваш линеарни равенки со целобројни коефициенти во даден контекст;
- генерираш низи од цели броеви и визуелни прикази и да запишуваш општ член на низа;
- претставуваш проблеми од секојдневни ситуации со линеарни функции и да црташ нивни графикони.

Основи на алгебрата.

Членови, изрази и равенки

Алгебрата е една од основните гранки на математиката која ни овозможува да работиме со броеви, променливи и математички операции на поапстрактно ниво. Освен броевите, во алгебрата користиме букви и симболи (на пример, x , y , a , b , $+$, $-$, ...) за да претставиме непознати вредности, што ни помага да решаваме различни математички проблеми.



Во оваа лекција ќе ги истражуваш трите клучни елементи на алгебрата: членови, изрази и равенки. Ќе научиш што претставуваат членовите на еден математички израз, како да препознаваш и составуваш алгебарски изрази и равенки – кои се основните алатки за пресметување и моделирање реални ситуации. Оваа основа е важна бидејќи алгебрата е присутна во многу области на науката, техниката, економијата и секојдневниот живот. Разбирањето на овие концепти ќе ти помогне да развиеш логичко размислување и вештини за решавање проблеми.

Пример 1

Марко сака да купи тетратки и пенкала. Во книжарницата, една тетратка чини 50 денари, а едно пенкало 30 денари. Тој купил 3 тетратки и 2 пенкала. Колку пари потрошил Марко во книжарницата?

Решение:

За да го најдеш вкупниот износ што го потрошил Марко, пресметувај $3 \cdot 50 + 2 \cdot 30 = 150 + 60 = 210$ денари.

Записот кој го користеше за да пресметаш колку пари потрошил Марко содржи броеви и знаци за некои од операциите што ги имаш изучено. Тој запис претставува броен израз. Добиената вредност по извршувањето на сите операции во изразот се вика бројна вредност на изразот.

Задача 1

Пресметај ги бројните вредности на изразите:

- а) $120 - 17 + 78 : 3 + (60 - 400 : 10)$
- б) $88 + 24 : 6 - 48 + 2 \cdot 60$
- в) $((51 - 31) + 7) \cdot 5$

Пример 2

Ана и Бојан штедат пари секој месец. Ана заштедува x денари месечно, а Бојан заштедува 2 пати повеќе од Ана.

- Колку пари заштедува Бојан?
- Запиши израз за вкупната заштеда на Ана и Бојан.
- Ако двајцата заедно заштедиле 9000 денари, запиши ја равенката од која ќе може да се пресмета колку заштедува секој од нив?

Решение:

а) Бидејќи Бојан заштедува 2 пати повеќе од Ана, тоа значи дека неговата заштеда е: $2x$.

б) Значи, вкупната заштеда на Ана и Бојан е: $x + 2x$.

Членови на овој израз се x и $2x$.

Бројот (константата) пред променливата во секој член се нарекува коефициент на тој член.

На пример, за членот $2x$ коефициент е 2, а главна вредност x ; за членот x коефициентот е 1, а главна вредност исто така x . Членовите x и $2x$ се слични бидејќи имаат иста главна вредност. Членот $-x$ е спротивен на x .

в) Според податокот во задачата, нивната заедничка заштеда е 9000 денари, па имаме $x + 2x = 9000$.

Променлива е симбол (најчесто буква) кој претставува број што може да се менува или е непознат. На пример, $x, y, z, m, n \dots$ се променливи.

Алгебарски израз е запис од броеви (константи) и променливи поврзани на соодветен начин со знаците за математички операции.

Примери на изрази: $4x + 7, a^2 - 3a + 5, 4x + 3y - 7, 18m^3 - 5n^2 + p, \dots$

Изразите од типот $4x + 7$ и $4x + 3y - 7$ се линеарни изрази бидејќи во нив секој член што содржи променлива е од прв степен.

Два алгебарски изрази од кои барем едниот содржи променлива (променливи) поврзани со знакот „ $=$ “ формираат равенка.

Примери на линеарни равенки:

$2x + 5 = 11, y - 4 = 0, 2a + 2b = 8, 2x - y = 3y + 25, \dots$

Задача 2

Кои од изразите се линеарни?

- | | | |
|------------------|-------------------|---------------------|
| а) $4x + 3$ | б) $x^2 + 5x + 6$ | в) $3y^2 - 2xy + 4$ |
| г) $5a - 2b + 7$ | д) $2y + 10z - 3$ | е) $\sqrt{x} + 4$ |

Објасни зошто?

Задача 3

Запиши три изрази и три равенки. За секој израз и равенка запиши ги нивните членови.

Пример 3

Напиши израз кој покажува колку ќе платиш ако купиш три пакувања млеко, секое по m денари, и четири пакувања сок, секое по s денари.

Решение:

Ако цената на 1 пакување млеко е m денари, а цената на 1 пакување сок е s денари, тогаш за 3 пакувања млеко ќе платиш: $3 \cdot m = 3m$.

За 4 пакувања сок ќе платиш: $4 \cdot s = 4s$.

Вкупната сума што ќе ја платиш е: $3m + 4s$. Кои се членовите на изразот?

Пример 4

Си бил на пазар и за 1 килограм јаболка и 2 килограми портокали си платил 260 денари. Знаеш дека 1 килограм јаболка чини 80 денари, но не ја знаеш цената на 1 килограм портокали и сакаш да ја пресметаш. Како би го претставил ова со равенка?

Решение:

Непознатата цена на 1 kg портокали да ја означиме со x денари, тогаш 2 kg портокали ќе чинат $2x$ денари. Цената на 1 kg јаболка е 80 денари, па изразот за вкупната сума што ќе се плати за 2 kg портокали и 1 kg јаболка ќе биде $2x + 80$. Оваа сума се, всушност, потрошените 260 денари, па конечно равенката ќе гласи $2x + 80 = 260$. Кои се членовите на равенката што ја напиша?

Задача 4

Состави равенка за следниот проблем: за три маици од по p денари и панталони од 1500 денари се потрошени вкупно 3600 денари.

Задача 5

Состави равенка за следниот проблем: 2 лименки сок од по 30 денари и 4 пакувања грицки по y денари чинат 15 денари повеќе од 7 пакувања грицки.

Кои се предностите кога користиш алгебарски изрази и равенки во секојдневниот живот во споредба со обичното пресметување?

Во твојата тетратка за ДА запиши пример, а за НЕ врати се на делот од лекцијата на кој се однесува тврдењето и повторно разгледај го примерот/ите.

1. Разбирам што значат поимите член, израз и равенка. (Да/Не)
2. Мојам да составам алгебарски изрази користејќи променливи. (Да/Не)
3. Знам да составам равенка за секојдневен проблем. (Да/Не)

Самостојна работа

1. Петар има x години. Неговата сестра е 4 години помлада од него. Состави израз што ја прикажува нејзината возраст.
2. Збирот на два броја е 56. Ако еден од броевите е x , состави израз со кој се претставува другиот број.
3. Наставничката има s чоколади и сака рамномерно да им ги подели на 5 ученици. Состави израз што ја покажува количината што ќе ја добие секој ученик.
4. а) Ако еден број е 3 пати поголем од друг број x , состави израз што го претставува поголемиот број.
б) Ако еден број е 4 пати помал од друг број y , состави израз што го претставува помалиот број.
5. Еден автомобил троши u литри гориво на 100 километри. Ако со тој автомобил се поминат 300 километри, состави алгебарски израз за вкупната потрошувачка на гориво.
6. Во продавница си купил 4 килограми јаболка по a денари за килограм и 2 килограми банани по b денари за килограм. Состави израз за вкупната цена што треба да ја платиш.
7. а) Состави израз со кој ќе претставиш колку е кусурот што треба да го добиеш кога со банкнота од 500 денари плаќаш 3 сока од по x денари.
б) Состави израз со кој ќе претставиш колку е кусурот што треба да го добиеш кога со банкнота од 500 денари плаќаш 3 сока од по x денари и 4 февречиња од по y денари.
8. Состави равенка со која ќе го прикажеш следниот проблем: збирот на два броја е 87, а едниот број е за 5 поголем од другиот.
9. Висината на една зграда е h метри, а друга зграда е 30 метри повисока од неа. Ако збирот на нивните висини е 150 метри, состави равенка за определување на висината.
10. Едно семејство плаќа x денари за струја, што е тројно повеќе од сумата што ја плаќа за вода. Ако вкупните трошоци за овие две сметки изнесуваат 24000 денари, состави равенка за да ја најдеш сумата што ја плаќаат за вода.
11. Марко има основна месечна плата од p денари. Освен тоа, добива бонус од 10 % од платата и уште 5000 денари за дополнителна работа. Ако заработил вкупно 51200 денари, состави равенка за да ја најдеш неговата основна плата.

Упростување на линеарен израз. Пресметување вредност

Во оваа лекција ќе научиш како да го користиш редоследот на алгебарските операции за да ги поедноставуваш изразите, што е клучно за правилно решавање математички задачи. Прво, ќе се фокусираш на собирање слични членови, што е важен чекор во процесот на поедноставување на изразите. Потоа ќе научиш како да ги множиш изразите со константи надвор од заграда и како овие операции влијаат врз крајниот резултат. Следно, ќе го разгледаш концептот на пресметување на вредноста на израз со променливи кога за нив се дадени конкретни вредности. Ова ќе ти помогне да разбереш како може да се примени математиката за решавање реални проблеми и да ги развиеш вештините за точни пресметки.



Пример 1

Илир продава три различни видови овошје по следните цени:

килограм јаболка чини $4x$ денари,
килограм круши чини $3x$ денари,
килограм портокали $2x$ денари,
кесата за пакување на овошјето чини 5 денари.

Состави алгебарски израз кој ја претставува вкупната цена за купување по 1 kg овошје од трите вида кое ќе биде спакувано во кеса.

Решение:

Вкупната цена ќе биде претставена со следниот алгебарски израз:
 $4x + 3x + 2x + 5$.

Задача 1

Марија купила 2 книги. Цената на една книга е $2x$ денари, а за доставата на книгите платила дополнителни x денари. Колку вкупно денари треба да плати Марија за двете книги и доставата?

Пример 2

Упрости го линеарниот израз од пример 1 и пресметај ја вредноста на изразот кога $x = 10$.

Решение:

Упростување на изразот значи да се извршат операциите меѓу сличните членови, односно ги собираш сличните членови со x ($4x$, $3x$ и $2x$)

$$4x + 3x + 2x + 5 = 9x + 5 - \text{упростен израз.}$$

За пресметување на вредноста на изразот кога $x = 10$, ја пишуваме вредноста 10 наместо x и добиваме: $9x + 5 = 9 \cdot 10 + 5 = 90 + 5 = 95$. Значи, вредноста на изразот $9x + 5$ кога $x = 10$ е 95.

Пример 3

Упрости го следниот линеарен израз: $3 \cdot (2y + 4)$. Потоа пресметај ја вредноста на изразот кога $y = 2$.

Решение:

За упростување на изразот, прво треба да се ослободиш од заградите и да ги примениш алгебарските операции $3 \cdot (2y + 4) = 6y + 12$.

Пресметување на вредноста на изразот кога $y = 2$, добиваме $6y + 12 = 6 \cdot 2 + 12 = 12 + 12 = 24$.

Пример 4

Упрости го изразот $-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3$ и пресметај ја неговата вредност кога $x = -3$.

Решение:

При упростување на изразот најпрво се ослободуваме од заградата, а потоа ги собираме сличните членови (како што се означени со подвлекувањето).

$$-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3 = \underline{-6x} \quad \underline{-10} \quad \underline{-4x} \quad \underline{+3} = -10x - 7$$

Сега во упростиениот израз заменуваме за вредноста на x , односно $x = -3$ и добиваме $-10x - 7 = -10 \cdot (-3) - 7 = 30 - 7 = 23$.

Задача 2

Упрости ги изразите, а потоа пресметај ја вредноста на изразите за дадената вредност на променливата/ите.

а) $4x + 3 - 2x + 7$, $x = 5$

б) $3a - 4a + 2a + 5$, $a = 3$

в) $2x - 7 + x - 9y + 7$, $x = 1$, $y = -1$

г) $4(x + 3) - 2(x - 1)$, $x = 2$

д) $2(y + 4) - 3(y - 2)$, $y = -3$

Пример 5:

Марјан отишол да купи тетратки и пенкала за новата учебна година. Цената на една тетратка е t денари, а цената на едно пенкало е p денари. Тој купил 3 тетратки и 2 пенкала. Подоцна решил да купи уште 2 тетратки и 1 пенкало.

- Состави алгебарски израз кој ја покажува вкупната цена што ја платил Марјан.
- Упрости го изразот.
- Пресметај ја вкупната сума ако една тетратка чини 80 денари, а едно пенкало 50 денари.

Решение:

- Составување на изразот: $3t + 2p + 2t + p$.
- Упростување на изразот: $3t + 2p + 2t + p = (3t + 2t) + (2p + p) = 5t + 3p$.
- Пресметување на вкупната сума, односно вредноста на изразот за дадени вредности на променливите: ако $t = 80$, $p = 50$, тогаш $5t + 3p = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 50 = 400 + 150 = 550$ денари
Значи, Марјан потрошил 550 денари за тетратки и пенкала.

Задача 3

Александра тренира пливаче. Во првите 4 дена таа пливала по d метри должина. Потоа, во наредните 3 дена, секој ден пливала по 5 метри повеќе од првите четири дена.

- Состави алгебарски израз што го покажува вкупниот број метри што ги испливала за овие 7 дена.
- Упрости го изразот.
- Пресметај го вкупниот број на испливани метри ако секој ден во првите 4 дена пливала по 200 метри.

Зошто е важно да го почитуваме редоследот на алгебарските операции при упростување на изразите? Кои чекори треба да ги следиш кога решаваеш сложен математички израз со загради и различни операции? Објасни го процесот.

Како можеш да ги користиш алгебарските изрази во секојдневни ситуации, како што се пазарење, спорт или планирање на времето? Дали е полесно најпрво да се поедностави алгебарскиот израз пред да се пресмета неговата вредност? Објасни зошто.

Прецртај ја табелата во твојата тетратка и оцени ги твоите знаења. Сподели ја табелата со соучениците.

	Целосно разбираам	Делумно разбираам	Не разбираам
Можам да упростам линеарен израз со собирање слични членови.			
Можам да множам со константа надвор од заграда.			
Можам да пресметам вредност на линеарен израз за дадена вредност на променливата.			

Самостојна работа

1. Упрости го изразот:

- а) $3(2x + 4) - 5x$ б) $5(a - 2) + 3(2a + 1)$ в) $2(3m - 4) - 4(m + 5)$
 г) $4(2x - 3) + 5(1 - x)$ д) $5(2 - y) - 3(4y - 1)$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $4y - 7 + 2(y + 3)$ за $y = 2$ б) $7 - 3x + 2(4 - x)$ за $x = -1$
 в) $3(2k + 1) - 4(k - 2)$ за $k = 3$ г) $2(3p - 4) + 3(2 - p)$ за $p = 0$
 д) $6 - 2(3x - 4) + x$ за $x = 2$

3. Јован работи за странска фирма и заработува 15 евра за 1 час. Напиши израз кој ја претставува неговата месечна заработка ако работи x часа месечно. Пресметај ја неговата месечна заработка ако работи 160 часа месечно.

4. Амра продава рачно изработен накит. Еден ѓердан го продава за 25 евра. Напиши израз кој ја претставува месечната сума за x продадени ѓердани. Пресметај ја месечната сума ако продаде 50 ѓердани месечно.

5. Алекс патува со автомобил кој троши 8 литри гориво на 100 километри. Ако патувањето е долго 400 километри, а цената на горивото е x денари по литар, напиши линеарен израз кој ја претставува вкупната цена на горивото за патувањето. Пресметај ја вкупната цена на горивото за патот од 400 km ако 1 литар чини 80 денари.

6. Во продавница цената на еден производ е 15 евра. Напиши линеарен израз кој ја претставува вкупната цена за x производи. Пресметај ја вкупната цена ако купиш 10 производи.

7. Мерита сака да оди на патување и има 200 евра. Секој ден од патувањето таа би трошела 30 евра за храна и 20 евра за превоз. Напиши израз кој ја претставува вкупната потрошувачка по x дена. Пресметај ја вкупната потрошувачка ако патувањето трае 5 дена. Дали на Мерита би ѝ биле доволни 200 евра?
8. Марија има месечен приход од 40000 денари. Таа троши 7000 денари за стан, x денари за облека, $2x$ денари за превоз и $3x$ денари за храна месечно. Напиши израз кој ја претставува вкупната потрошувачка на Марија и израз за остатокот од месечниот приход. Пресметај ја вкупната месечна потрошувачка на Марија ако за облека троши 3000 денари. Дали Марија ќе има заштеда во месецот кога за облека ќе потроши 3000 денари?
9. Во ботаничка градина имало u корени бегонија, 3 пати повеќе лаванда, $3u - 4$ корени љубичица и жалфија 2 пати повеќе од љубичица. Запиши израз колку корени се останати во ботаничката градина ако 7 u корени се исушиле?

Формули. Изразување на една променлива преку друга

Формулите се алатки кои ќе ти овозможат лесно и брзо да решаваш проблеми. Кога користиш променливи, можеш да изразиш врски меѓу различни величини. Во оваа лекција ќе научиш како да составуваш едноставни формули и да изразуваш една променлива преку друга. Ќе научиш како да ги примениш овие знаења во секојдневни ситуации, како пресметување цена, брзина или време.

Овие вештини се користат не само во математиката, туку и во разни области како физика, економија и инженерство, каде што често се среќаваме со ситуации кои бараат такви пресметки.

$$\text{Време} = \frac{\text{Растојание}}{\text{Брзина}}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Пример 1

Ако Димитар чита 20 страници на ден, напиши израз кој го претставува бројот на страници што Димитар ќе ги прочита за x дена.

Решение:

Бројот на прочитани страници по x дена е даден со изразот: $20x$. Доколку вкупниот број на прочитани страници го обележиме со B , би добиле дека $B = 20x$.

Пример 2

Петар е 23 години постар од Селма. Петар има p години, а Селма има s години. Состави формула што ги поврзува годините s и p .

Решение:

Ако ги запишеме годините алгебарски, со дадените букви, односно променливи имаме:
 $p = s + 23$. Оваа формула ја дава врската меѓу годините на Петар и на Селма.

Формула е прецизен начин на поврзување на променливите со соодветни математички операции за дадена ситуација (задача). Формулите често се користат за изразување општи правила или законитости во математиката, во други науки, па дури и во секојдневниот живот.

Пример 3

Една книга чини 170 денари, а едно списание чини 50 денари. Напиши формула за вкупната цена S , во денари, што треба да се плати при купување x книги и y списанија.

Решение:

Вкупната цена = вкупната цена на книгите + вкупната цена на списанијата.

Вкупната цена на книгите е $170 \cdot x = 170x$. Вкупната цена на списанијата е $50 \cdot y = 50y$.

Формулата за вкупната цена гласи $S = 170x + 50y$.

Пример 4

Изрази ја страната на рамностран триаголник a преку периметарот L .

Решение:

Периметарот на рамностран триаголник $L = 3a$, па ако сакаме да ја изразиме страната преку нејзината врска со периметарот, добиваме $a = \frac{L}{3}$. Ако е даден периметарот на триаголникот, на пример, $L = 75$ cm, тогаш страната $a = \frac{75}{3} = 25$ cm.

Задача 1

Годините на мајката се збир од годините на синот и ќерката. Запиши формула која ги изразува годините на мајката преку годините на синот и ќерката. Потоа изрази ги годините на синот преку годините на мајката и сестрата.

Задача 2

Состави формула за периметар L на рамнокрак триаголник со основа a и крак b , а потоа:

- а) изрази ја основата преку останатите променливи во формулата,
 б) изрази го кракот преку останатите променливи во формулата.

Пример 5

Лука патува со такси до аеродром, но не е сигурен дали ќе има доволно средства за превозот. Тој знае дека такси-компанијата наплаќа фиксен трошок (старт) од 80 денари и 50 денари по изминат километар. Ако бројот на изминати километри е означен со k , а вкупната цена за превозот со C :

- а) запиши ја формулата според која се пресметува вкупната цена за превоз C ,
 б) изрази го бројот на километри k преку останатите променливи во формулата,
 в) дали на Лука ќе му стасаат 4000 денари за превоз ако треба да помине 70 километри со такси до аеродромот?

Решение:

- а) Вкупната цена за превоз = трошок за старт + трошок за изминатите километри.
 Трошокот за изминатите километри = цена за 1 километар $\cdot$ бројот на километри
 $= 50 \cdot k$. Конечно $C = 80 + 50k$.
- б) За да го изразиме бројот на изминати километри k , прво од двете страни на формулата одземеме 80. Имаме $C - 80 = 80 + 50k - 80$, односно добиваме $C - 80 = 50k$.
 Потоа делиме со 50, односно $50k : 50 = (C - 80) : 50$ и добиваме $k = \frac{C-80}{50}$.
- в) Овде прашањето е, всушност, колку километри може да помине Лука со 4000 денари. Заменуваме за вредноста на $C = 4000$ во формулата што ја добивме под б).
 $k = \frac{4000-80}{50} = \frac{3920}{50} = 78,4 \text{ km} > 70 \text{ km}$ значи Лука има доволно денари за да плати такси до аеродром.
 (втор начин, колку пари му требаат на Лука за такси за растојание оддалечено 70 km;
 $80 + 70 \cdot 50 = 3580 < 4000$).

Задача 3

Во една компанија за производство на кошули цената на една кошула е 800 денари, а фиксните трошоци за производство на кошулите изнесуваат 12000 денари месечно. Напиши формула која ја претставува вкупната месечна сума C (во денари) за производство на x кошули. Потоа изрази ја променливата x преку C .

Задача 4

Формулата за пресметување плоштина на квадрат е $P = a^2$, каде што P е плоштината, а a е должината на страната. Изрази ја страната a преку плоштината P . Потоа, ако $P = 49 \text{ cm}^2$, пресметај ја страната на квадратот.

Во твојата тетратка за ДА запиши пример, а за НЕ врати се на делот од лекцијата на кој се однесува тврдењето и повторно разгледај го примерот/ите.

1. Знам да составам едноставни формули. (Да/Не)
2. Мојам да изразам една променлива преку друга во формула. (Да/Не)
3. Ги разбираам формулите и нивната примена во секојдневни ситуации. (Да/Не)

Самостојна работа

1. Замисли дека купуваш неколку килограми јаболка. Ако цената на 1 kg е c , а купуваш k килограми, како ќе ја пресметаш вкупната цена? Напиши ја формулата што ја покажува врската меѓу вкупната цена (C), цената за 1 kg (c) и количината (k).
2. Во една овошна градина имало 30 сандаци со садници стебла. Во секој сандак имало по x стебла. Поради лоши временски услови и ненавремена заштита, секоја седмица се сушат по 3 стебла. Состави формула со која ќе се пресметува вкупниот број на здрави стебла V по m седмици.
3. Патуваш со автомобил. Формулата за брзина е: $v = \frac{S}{t}$, каде што v е брзината, S е растојанието, а t е времето. Изрази го времето (t) преку растојанието (S) и брзината (v).
4. Во хемиска реакција температурата на супстанцијата се зголемува секој час за 2°C . Ако почетната температура е T_0 , напиши формула која ја претставува температурата T по x часа. Потоа изрази ја променливата x преку T .
5. Во една фарма бројот на животни секој месец се зголемува за 12. Ако почетниот број на животни е m , напиши формула која го претставува бројот на животни n по x месеци. Потоа изрази ја променливата x преку n .
6. Енес изнајмил штанд за продажба на сувенири. Фиксните трошоци за изнајмување на штандот изнесуваат 1500 денари месечно, а добивката што ја има Енес за 1 продаден сувенир е 20 денари.
 - а) Напиши формула која ја претставува заработувачката C (во денари) на Енес од продажба на x сувенири.
 - б) Изрази ја променливата x преку C .
 - в) Колку најмалку сувенири мора да продаде Енес за да може да ги плати фиксните месечни трошоци?
7. Изрази ја должината a на правоаголникот:
 - а) од формулата за периметар $L = 2a + 2b$,
 - б) од формулата за плоштина $P = a \cdot b$.

Линеарна равенка со една непозната.

Решение на равенка

Во секојдневниот живот често се среќаваш со ситуации во кои треба да пресметаш непозната вредност, на пример, колку пари ти недостигаат за да купиш нешто, колку време ќе ти биде потребно да стигнеш до некоја дестинација, колку единици од некој производ треба да купиш за да потрошиш одредена сума и слично. Споменатите проблеми можат да се решат со помош на линеарни равенки.

$$\begin{aligned} \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 21 \\ \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 13 \\ \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 18 \\ \text{🍌} - \text{🍌} + \text{🍌} - \text{🍌} &= ? \end{aligned}$$

Пример 1

- а) Дадена е равенката $2x + 5 = 11$. Провери за кои вредности на x од множеството $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ равенката поминува во точно бројно равенство.

Решение:

Со директна замена на секоја од вредностите за x од множеството се добиваат 5 различни бројни равенства, од кои само едно е точно. За таа вредност на x велиме дека е решение на равенката $2x + 5 = 11$.

Вредност за x	Бројно равенство	Точно/неточно	Решение
$x = -1$	$2 \cdot (-1) + 5 = 11$	неточно	Не
$x = 0$	$2 \cdot 0 + 5 = 11$	неточно	Не
$x = 1$	$2 \cdot 1 + 5 = 11$	неточно	Не
$x = 2$	$2 \cdot 2 + 5 = 11$	неточно	Не
$x = 3$	$2 \cdot 3 + 5 = 11$	точно	Да

Вредноста на променливата за која равенката преминува во точно бројно равенство се вика решение на равенката.

Задача 1

Провери дали:

- а) $x = 3$ е решение на равенката $3x + 10 = 1$ б) $x = -2$ е решение на равенката $x^2 = 4$
 в) $x = 2$ е решение на равенката $x^2 = 4$ г) $x = -\frac{2}{3}$ е решение на равенката $3 - 5x = x + 7$

Задача 2

За кои вредности на x бројната вредност на изразот $x - 1$ е еднаква на:

- а) 0 б) 5 в) -6

Пример 2

Реша ја равенката $7x + 4 = 9 - 3x$.

Решение:

При решавањето линеарни равенки користиме инверзни операции, при што ја доведуваме равенката во решена форма од облик $x = a$.

Во конкретниот случај, најпрво на двете страни на равенката додаваме $3x$, па -4 и на крај делиме со 10.

$$7x + 4 = 9 - 3x \quad | +3x$$

$$7x + 4 + 3x = 9 - 3x + 3x$$

$$10x + 4 = 9 \quad | -4$$

$$10x + 4 - 4 = 9 - 4$$

$$10x = 5 \quad | : 10$$

$$x = 5 : 10$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Како ќе провериш дека $x = \frac{1}{2}$ е решение на равенката $7x + 4 = 9 - 3x$?

Пример 3

Реша ја равенката $2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$.

Решение:

Прво се ослободуваме од заградите, а потоа постапуваме слично како во претходниот пример:

$$2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$$

$$2x - 6 + 4 = 10 - 3x + 3$$

$$2x - 2 = 13 - 3x \quad | +3x + 2$$

$$2x + 3x = 13 + 2$$

$$5x = 15 \quad | : 5$$

$$x = 3$$

Објасни зошто.

Задача 3

Реша ги равенките и направи проверка на решението:

- а) $7x + 4 = -38$ б) $3(2x - 4) = 5x + 1$ в) $3(x + 1) + 5 = 8 - 2(x - 5)$

Пример 4

Мартина има 250 денари и сака да купи неколку пакувања грицки. Едно пакување грицки чини 40 денари. Таа сака да пресмета колку пакувања може да купи ако по купувањето треба да ѝ останат 30 денари за автобуски билет.

Решение:

Задачата ќе ја решиме најпрво со составување равенка, а потоа и со нејзино решавање. Нека x е бројот на пакувања кој треба да го определиме. Според условите на задачата, за x пакувања грицки вкупната сума што ќе ја потроши Мартина е $40x$, а остатокот е 30 денари. Бидејќи првично имала 250 денари, можеме да ја составиме следната равенка $250 - 40x = 30$. Следен чекор е решавање на равенката за да одговориме на прашањето колку пакувања грицки може да купи Мартина.

$$\begin{aligned}250 - 40x &= 30 && | -250 \\-40x &= 30 - 250 \\-40x &= -220 && | : (-40) \\x &= 5,5\end{aligned}$$

За бројот на пакувања од равенката се добива 5,5, но бидејќи Мартина не може да земе половина пакување, таа ќе купи 5 пакувања. На крај ќе ѝ останат $250 - 40 \cdot 5 = 50$ денари, па на тој начин сигурно ќе има пари и за автобуски билет.

Задача 4

Едно училиште организира екскурзија, а цената за превозот по ученик е 300 денари. Освен тоа, за сите ученици треба да се плати и вкупна фиксна сума од 5000 денари за водич. Вкупната сума што треба да се плати за излетот е 23 000 денари. Колку ученици ќе одат на излетот?

Како можеш да препознаеш кога некој проблем од реалниот живот може да се реши со линеарна равенка? Дали секогаш решението на равенката има смисла во реалниот контекст? Објасни со пример. Можеш ли да смислиш друг пример од секојдневниот живот каде што ќе користиш линеарна равенка за да пресметаш непозната вредност? Како можеш да провериш дали твоето решение на равенката е точно?

Одговори ги прашањата во твојата тетратка. Сподели ги одговорите со соучениците.

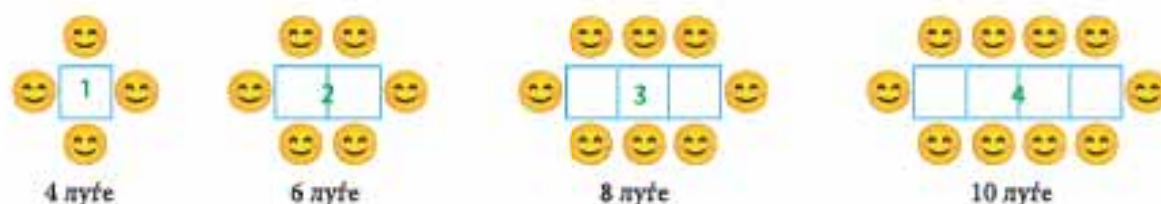
1. Размисли: Дали можам да составам линеарна равенка за проблем од секојдневниот живот?
2. Реши: Дали знам да решавам равенка чекор по чекор?
3. Провери: Дали можам да ја проверам точноста на моето решение со замена?
4. Примени: Можам ли да смислам свој проблем што се решава со линеарна равенка?

Самостојна работа

1. Дадена е равенката: $5x - 7 = 18$. Дали $x = 5$ е решение на равенката?
- 2*. Реша ги равенките: а) $2x + 5 = 3x - 7$ б) $0 \cdot y + 9 = 0$ в) $0 \cdot z + 0 = 0$
3. Ана и Бојан заедно имаат 56 книги. Ана има 8 книги повеќе од Бојан. Запиши равенка која го претставува овој проблем.
4. Лирим замислил број таков што кога ќе се помножи со 3 и потоа ќе се додаде 5, резултатот е 20. Кој број го замислил Лирим?
5. Марко купил 4 кутии со бонбони така што во секоја кутија имало по x бонбони. Потоа изел 6 бонбони и му останале 34. Колку бонбони имало во секоја кутија?
6. Во еден ресторан цената на пица и сок е 540 денари. Ако пицата чини три пати повеќе од сокот, колку чини сокот?
7. Периметарот на правоаголник е 48 cm. Должината е три пати поголема од ширината. Колкави се должината и ширината на правоаголникот?
8. Во игра со топка, Јанко и Славко ги договориле следните правила: за секој погодок на кошот добиваат 3 поени, а за промашување губат 2 поена. Јанко вели дека Славко освоил 33 поени по 16 обиди на кошот, но не знае колку пати успеал да погоди, а колку пати промашил. Помогни им да го решат проблемот (состави равенка, реши ја и провери дали твоето решение е точно).
9. Плаќаш месечен пакет за телефон од 1000 денари и секоја минута разговор над пакетот се наплаќа 5 денари. Ако сметката за овој месец изнесува 1150 денари, колку минути над пакетот си зборувал? Состави равенка, реши ја и објасни ги чекорите.
10. Во една продавница, јакна и панталони заедно чинат 6500 денари. Јакната чини 500 денари повеќе од двојната цена на панталоните. Колку чини секој производ?
11. Андреј купил 3 пара спортски обувки и еден ранец. Секој пар обувки чини исто, а ранецот е 800 денари поскап од двојната цена на еден пар. Ако платил вкупно 14600 денари, колку чини еден пар обувки?
12. Михаела патувала со воз и автобус. Растојанието што го поминала со автобус зголемено за 80 километри е три пати помало од растојанието што го поминала со возот. Ако вкупното растојание било 560 km, колку километри поминала Михаела со секој превоз?
13. Во еден фабрички резервоар има 120 литри вода. Секој час во него влегуваат три пати повеќе литри отколку што истекуваат, но покрај тоа, секој час дополнително се додаваат 40 литри. Ако по 6 часа резервоарот содржи 900 литри, колку литри вода влегуваат и истекуваат во еден час?

Низи од цели броеви

Замисли дека организираш роденденска забава, го организираш просторот и треба да пресметаш колку гости може да седнат на 4 споени маси, 5 маси... (како што е прикажано на сликата). Дали постои врска меѓу бројот на споени маси и бројот на столчиња околу нив? Дали постои врска меѓу секое наредно редене на столчето со претходното? Во оваа лекција ќе научиш како да подредуваш броеви и цртежи, да откриеш како функционира редоследот на броевите или цртежите. Ќе истражуваш како се добива секој следен број или визуелен приказ, шема во дадена низа и како да најдеш кој број стои на одредена позиција.



Пример 1

Амине штеди секој ден. Првиот ден заштедила 5 денари, вториот ден имала 10 денари, а третиот ден нејзината заштеда била 15 денари. Ако продолжи вака секој ден, колку вкупно денари ќе има заштедено петтиот ден?

Решение:

Забележуваме дека Амине секој ден додава по 5 денари на претходната сума:

- Прв ден: 5 денари
- Втор ден: 10 денари ($5 + 5$)
- Трет ден: 15 денари ($10 + 5$)
- Четврти ден: 20 денари ($15 + 5$)
- Петти ден: 25 денари ($20 + 5$)

Значи, на петтиот ден Амине ќе има 25 денари.

Овој начин на запишување броеви во одреден редослед ќе ти помогне да разбереш што е низа и како можеш да ги откриеш нејзините членови.

Задача 1

Број со чекор 4, почнувајќи од: а) -5 б) -2 в) 1 .

Кој ќе биде шестиот член?

Пример 2

Дадени се броевите: 5, 8, 11, 14, 17, ...

- Кој е седмиот број?
- Кое е правилото со кое се определува секој следен број?

Решение:

- Првиот број (a_1): 5,
вториот број (a_2): 5+3,
третиот број (a_3): 5+3+3,
четвртиот број (a_4): 5+3+3+3,
петиот број (a_5): 5+3+3+3+3,
шестиот број (a_6): 5+3+3+3+3+3,
седмиот број (a_7): 5+3+3+3+3+3+3.
Значи, седмиот број е 23.

Подредени броеви или цртежи (шеми) кои се поврзани со одредено правило се нарекуваат низа. Броевите, шемите или визуелните прикази (цртежи) во една низа ги нарекуваме членови на низата.

Членовите во низата ги означуваме со $a_1, a_2, a_3, \dots$ каде што индексот (малото бројче десно од буквата a) покажува на кое место се наоѓа членот во низата.

- Секој член на низата 5, 8, 11, 14, 17, ... е за 3 поголем од претходниот. Значи, броевите се добиваат со додавање на 3.

Правилото за одредување следен член на низата е „додај 3“.

Може да забележиш дека секој нареден член од низата се добива со додавање на 3 повеќе пати.

Ако членот што е n -ти по редослед во низата, односно n -тиот член го означиме со a_n , можеме да запишеме дека $a_n = 5 + 3 \cdot (\text{бројот на додадени тројки})$. Од примерот под а) забележуваме дека на вториот член се додава една тројка, на третиот член се додаваат две тројки, на четвртиот член се додаваат три тројки итн. Значи на n -тиот член ќе се додадат $(n - 1)$ тројки. Можеме да запишеме формула за определување на секој член (општ член) од низата $a_n = 5 + 3 \cdot (n - 1)$. Може да провериме дали формулата функционира. Имено, за седмиот член под а) добивме дека е 23. Според формулата $a_7 = 5 + 3 \cdot (7 - 1) = 5 + 3 \cdot 6 = 5 + 18 = 23$.

Пример 3

На следната слика се прикажани групи на ѕвездички:

*
**

а) Колку ѕвездички ќе има во шестата група? б) Како би изгледала десеттата група?

Решение:

- а) Ако ги броиш ѕвездичките во секоја група, ја добиваш низата: 1, 2, 3, 4, 5, ...
Може да воочиш дека секоја нова група содржи една ѕвездичка повеќе од претходната.
Значи, шестиот член ќе има 6 ѕвездички.
Правилото за одредување на бројот на ѕвездички во следната група е „додај 1“.
- б) За 10-тата група ќе има 10 ѕвездички, односно бројот на ѕвездички во n -тата група $a_n = n$, каде што n е бројот на групата, а a_n е бројот на ѕвездички во неа.

Задача 1

Општиот член на една низа е даден со формулата $a_n = 2n$. Колку е петтиот член, односно a_5 ?

Пример 4:

Марко почнал да реди столови во концертна сала. Во првиот ред има 4 стола, во вториот ред 7, во третиот 10, во четвртиот 13...

- а) Колку столови ќе има во шестиот ред?
б) Колку столови ќе има во дванаесеттиот ред?
в) Запиши формула за општиот член според која можеш да го пресметаш бројот на столови во кој било ред.
г) Ако наместо броеви ја претставиш оваа низа со цртеж, како би изгледале првите четири реда?

Решение:

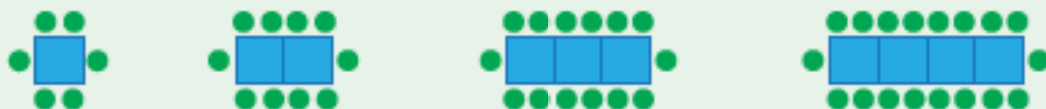
- а) Ако го запишеш бројот на столови во секој ред, ќе добиеш: 4, 7, 10, 13, ...
Забележуваш дека секој ред има 3 стола повеќе од претходниот.
Во петтиот ред има 16 стола ($13 + 3$), а во шестиот ред 19 стола ($16 + 3$).
- б) 12-тиот член има $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 33 = 37$.
- в) Формулата за општиот член на низата е: $a_n = 4 + 3(n - 1)$. Зошто? Врати се на пример 2 под а).
- г) Ако ја претставиш низата со цртежи, ќе изгледа вака:
- Ред 1: 
Ред 2: 
Ред 3: 
Ред 4: 

Задача 2

Орхан одлучил да штеди пари секоја недела. Првата недела имал заштеда 50 денари, втората недела 80 денари, третата недела 110 денари, четвртата 140 денари и така натаму.

- Колку пари ќе заштеди во осмата недела ако продолжи да штеди според дадената шема?
- Колку вкупно пари ќе има заштедено по десет недели?
- Напиши ја формулата по која ќе може да се пресмета колку ќе заштеди Орхан во која било недела.
- Како би изгледало ова визуелно ако го претставиме со редови парички?

На сликата е претставено редување на столчиња околу правоаголни маси со нивно спојување. Колку маси треба да се спојат за да можат да седнат 30 гости?



Во твојата тетратка за ДА запиши пример, а за НЕ врати се на делот од лекцијата на кој се однесува тврдењето и повторно разгледај го примерот/ите.

Можам да определувам членови на низа според дадено правило. а) Да б) Не

Можам да најдам член на дадена позиција. а) Да б) Не

Можам да најдам правило за низа со цели броеви. а) Да б) Не

Самостојна работа

- Низата на броеви што се појавуваат на бројчаникот на лифт во една зграда е 0, 3, 6, 9, 12, ...

- Опредиeli според кое правило е составена низата.
- Ако највисокиот кат на зградата е 74, дали тој ќе биде напишан на бројчаникот на лифтот? Дали сите катови во зградата се прикажани на бројчаникот?
- Запиши нова низа на појавување на броевите на бројчаникот на лифтот, почнувајќи со подземниот паркинг на зградата кој би бил означен со -2 и правило на низата кое сам ќе го одредиш.

- За секоја од низите:

- 69, 62, 55, 48, ... б) -17, -13, -9, -5, ...
- 11, 7, 3, -1, ... г) -5, -8, -11, -14, ...

запиши го правилото за одредување следен член на низата и запиши ги следните три члена.



3. Секој ден во училишната трпезарија се додавале 10 оброци повеќе. Првиот ден има 50 оброци.

- а) Запиши ја низата за првите пет дена. б) Запиши го општиот член на низата.

6. Твојата омилена видеоигра има нивоа што се зголемуваат по тежина според низата: 3, 10, 17, 24, ...

- а) Пронајди го правилото според кое се зголемува тежината на ниво на видеоиграта.
б) Осмисли нов начин на зголемување на тежината што би бил предизвик, но праведен предизвик.

7. Алекс сака да постави светилки покрај патека во парк. Првата светилка е на 3 метри од почетокот, втората на 7 метри, третата на 12 метри, четвртата на 18 метри.

- а) Дали оваа низа има логично правило?
б) Дали растојанијата меѓу светилките се оптимални?
в) Како би го сменил редоследот за патеката да биде рамномерно осветлена?

8*. Во една видеоигра играчот собира златни монети. Бројот на монетите што ги добива во секое наредно ниво ја следи низата: 2, 6, 12, 20, 30, ...

- а) Можеш ли да откриеш како се зголемува бројот на монетите во секое наредно ниво?
б) Колку монети ќе добие играчот во 6-тото ниво?
в) Напиши општо правило според кое може да се пресмета бројот на монетите во кое било ниво.

9. Измисли своја интересна низа што ќе се користи за пресметување награди во игра, собирање бонуси или распределба на награди на турнир. Објасни зошто токму таа низа е добра и како ја направи фер за сите учесници.

10*. Запиши го правилото за општиот член на низата 2, 4, 8, 16, ...

11. Запиши го правилото според кое се определува општиот член на низата:

а)



б)

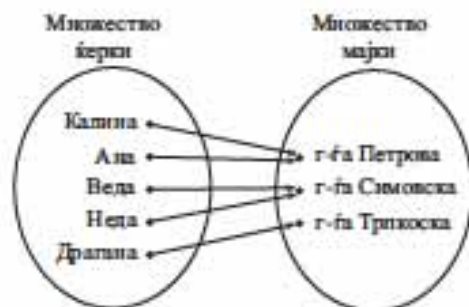


в)



Претставување едноставни функции

Математичкиот концепт функција е моќна алатка за моделирање и анализа на проблеми во реалниот свет. Таа е еден од основните поими во математиката кој опишува како една величина зависи од друга, односно поврзува елементи од едно множество со елементи од друго множество според одредено правило. Дел од тоа како се прикажува оваа врска ќе научиш со оваа лекција. Практикувајќи го наученото, ќе можеш да ги разбереш и применуваш функциите во реални животни ситуации, како и во понатамошното учење на математиката.



Пример 1

Јас започнувам со 2, а потоа секој следен број го добивам со додавање 5. Кои се првите пет броја во оваа низа и како го запишуваме правилото за наоѓање општ член?

Решение:



Првите пет бројеви во низата се: 2, 7, 12, 17, 22

Пример 2

Марко има 5 јаболка. Секој нареден ден добивал уште 3 јаболка. Колку јаболка ќе има по неколку дена добивање нови јаболка?

Решение:

Марко започнува со 5 јаболка. Секој ден добива уште три јаболка повеќе. Значи ако ситуацијата ја претставиме со зборови: „Од почетните 5, бројот на јаболката на Марко се зголемува за 3 секој ден.“

Функција е правило според кое на секој елемент од едно множество му се придружува точно еден елемент од друго множество.

Во овој пример бројот на јаболка зависи од бројот на денови според дадено правило (функција) кое ги поврзува двете величини „број на денови“ со „број на јаболка“. За поголема прегледност, тоа прво ќе го претставиме со табела:

Ден	Влез	Излез
Прв ден	$5 + 3$	8
Втор ден	$5 + 3 + 3$	11
Трет ден	$5 + 3 + 3 + 3$	14
Четврти ден	$5 + 3 + 3 + 3 + 3$	17
Петти ден	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	20
Шести ден	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	23

Според табелата и условот на задачата, за седмиот ден, на пример, бројот на јаболка ќе биде $5 + 3 \cdot 7 = 26$ јаболка. Ако со x го означиме бројот на денови, а со f правилото кое на бројот на денови му го придружува бројот на јаболка, имаме:

$$\begin{array}{lll}
 1 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 1 & 1 \xrightarrow{f} 8 & f(1) = 5 + 3 \cdot 1 = 8 \\
 2 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 2 & \dots \text{односно } 2 \xrightarrow{f} 11 & \dots \text{или поинаку запишано } f(2) = 5 + 3 \cdot 2 = 11 \\
 3 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 3 & 3 \xrightarrow{f} 14 & f(3) = 5 + 3 \cdot 3 = 14
 \end{array}$$

Сега ако со x го означиме бројот на денови, а $f(x)$ е вкупниот број на јаболка, се добива формулата $f(x) = 5 + 3x$. Ваквиот начин на претставување на функцијата се вика аналитички (или претставување со формула).

Пред да почне Марко да добива јаболка, бројот на денови $x = 0$ и Марко има 5 јаболка.

Задача 1

На почетокот на учебната година Лена решава да почне да собира марки. Има 2 марки, а потоа секој ден додава по 4 марки. Колку марки ќе има Лена по 3 дена? Запиши ја функцијата со формула.

Пример 3

Во еден маркет производите се продаваат по посебни цени. За секој купувач продавницата нуди попуст во зависност од вкупната сума на купените производи:

- За сума до 1000 денари, нема попуст.
- За сума повеќе од 1000, но најмногу до 5000 денари, се одобрува попуст од 5 %.
- За сума над 5000 денари, се одобрува попуст од 10 %.

Продавницата нуди и дополнителен попуст од 2 % за сите купувачи што ќе ги платат своите сметки веднаш.

- Запиши ја функцијата која ја претставува цената што ја плаќа купувачот во зависност од тоа колку пари потрошил (без попустот за плаќање веднаш).
- Колку ќе плати купувачот што потрошил 6000 денари?

Решение:

а) Претставување со зборови: Прво, треба да разгледаме како сумата што ја плаќа купувачот зависи од износот што го потрошил:

- Ако потрошил до 1000 денари, нема попуст.
- Ако потрошил помеѓу 1000 и 5000 денари, попустот е 5 %.
- Ако потрошил над 5000 денари, попустот е 10 %.

Потоа, ако купувачот платил веднаш, се одобрува дополнителен попуст од 2 %.

Претставување со симболи:

Нека P е вкупниот износ што го потрошил купувачот, а од него зависи сумата што ќе ја плати на каса $f(P)$.

Функцијата за вкупната цена ќе изгледа вака:

$f(P) = P$ ако купувачот потрошил илјада или помалку од илјада денари.

$f(P) = 0,95 \cdot P$ ако потрошил повеќе од 1000 денари или помалку од 5000 или 5000 денари.

$f(P) = 0,90 \cdot P$ ако потрошил повеќе од 5000 денари.

$$\text{или скратено* } f(P) = \begin{cases} P & \text{ако } P \leq 1000 \\ 0,95 \cdot P, & \text{ако } 1000 < P \leq 5000 \\ 0,90 \cdot P, & \text{ако } P > 5000 \end{cases}$$

Ако купувачот плати веднаш, се одобрува дополнителен попуст од 2 % на износот што го плаќа, по примена на претходниот попуст. Тоа значи дека на конечната цена се одбиваат 2 % од вкупниот износ по примената на попустите.

б) Пресметување на вредноста на функцијата за конкретен пример: ако купувачот потрошил 6000 денари: според а) важи $f(6000) = 0,90 \cdot 6000$ денари.

Потоа применуваме попуст 2 % за плаќање веднаш на 5400 денари: $0,98 \cdot 5400 = 5292$ денари.

Задача 2

Јована продава цвеќиња. Ова е извадок од ценовникот за едно цвеќе од секој вид: Притоа, ако купувачот купи повеќе од 5 цвеќиња, му се одобрува попуст од 10 %. Ако купувачот купи повеќе од 10 цвеќиња, попустот расте на 15 %.

Јована решава да им понуди дополнителен попуст од 5 % на сите купувачи што ќе платат веднаш.

Роза: 300 денари.
Лале: 150 денари.
Орхида: 500 денари.

а) Запиши ја функцијата која ја претставува цената што ја плаќа купувачот во зависност од тоа колку цвеќиња купил (без попустот за плаќање веднаш).

б) Пресметај ја вкупната цена за купувачот кој купил 8 лалиња, 4 орхидеи и 2 рози, ако одлучил да плати веднаш.

Задача 3

При нуркање, притисокот на водата се зголемува со зголемување на длабочината на која се наоѓа нуркачот. Густината на морската вода е 1020 kg/m^3 , па на секои 10 метри притисокот расте за 1,02 бари (бар е мерна единица за притисок). Врската за неколку почетни вредности е прикажана во следната табела:

Длабочина d (m)	10	20	30	40	50
Притисок P (bar)	1,02	2,04	3,06	4,08	5,1

Дали е можно на некоја длабочина да има две различни вредности на притисок? Запиши ја функцијата за зависноста на притисокот од длабочината на нуркање, а потоа определи колкав е притисокот на водата на длабочина од 34 метри?

Дали можеш да наведеш пример од секојдневниот живот кој би можел да се претстави преку математичка функција? Обиди се да составиш текст за проблем во реален контекст за чие решавање би се користела функцијата

а) $f(x) = 320 - 5x$ б) $f(x) = 320 + 5x$

Направи мисловна мапа почнувајќи од поимот ФУНКЦИЈА. Потоа провери се со користење на лекцијата.

Самостојна работа

1. Претстави ја функцијата $f(x) = 2x + 5$ со зборови (објасни што значи секој дел од оваа функција).
2. Дадена е функцијата $f(x) = 2x - 1$. Определи ја вредноста на $f(x)$ за следните вредности на x : $x = 3$, $x = -2$, $x = 0$.
3. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ е позната функција во математиката. Објасни ја со зборови и запиши ја со формула.
4. Дадена е функција $f(x) = 3x - 4$. Запиши пет вредности на функцијата (за $x = 1, 2, 3, 4, 5$)?
5. Ако температурата во градот се зголемува за 3°C секој час, почнувајќи од 15°C , како би ја запишале функцијата за температурата во текот на времето?
6. Косата на Јана е долга 25 cm. Секој месец расте по 1,5 cm. Запиши функција K за зависноста на должината на косата на Јана по m месеци. Пресметај ја должината на косата на Јана по 5 месеци.
7. а) Во градината на Милош имало 40 садници зеленчук. Но, поради лоши временски услови, почнале да се сушат по 3 на ден. Запиши со формула како зависи бројот на садници S од бројот на денови d . За колку дена ќе се исушат сите садници?
б) Со зборови запиши ја функцијата која е дадена со $S = 15 + 4d$ (ако S , d се ознаки за број на садници и на денови) во градината на Милош.

8. Во табелата се дадени вредности за изминат пат во зависност од времето на патување на Лејла. Запиши ја зависноста на патот од времето.

Време (часови)	0	1	2	3	4
Пат (километри)	0	50	100	150	200

9. Омер изведува хемиски експеримент. Реакцијата што ја набљудува се состои од загревање на супстанција, при што температурата се зголемува за 2°C секоја минута. Ако почетната температура на супстанцијата била 18°C , запиши ја функцијата со која ќе пресметаш колкава е температурата T (во степени) за време t (во минути)?

Графички приказ на линеарна функција и координатни парови

Линеарните функции се едни од најчестите математички модели што ќе ги користиш во секојдневниот живот. Тие го претставуваат односот меѓу две величини.

На пример, вкупната маса на повеќе исти производи во маркет е линеарна функција од масата на еден таков производ; кога патуваш со константна брзина, растојанието што го поминуваш во дадено време е линеарна функција од времето; цената на такси-превоз е вредност на линеарна функција која зависи од изминатите километри.



Пример 1

Муса продава тетратки. Почнал со 200 денари, а заработува по 50 денари од секоја продадена тетратка. Напиши формула за функцијата која ја поврзува вкупната заработка $f(x)$ со бројот на продадени тетратки x .

Решение:

$f(x) = 50x + 200$, каде што: x е бројот на продадени тетратки, $f(x)$ е вкупната заработка, 50 е заработката по тетратка и 200 е почетната сума.

Линеарна функција е зависност меѓу две променливи која се изразува со формулата: $f(x) = ax + b$
 каде што: x е независна променлива, $f(x)$ е зависна променлива и често се запишува y ($y = ax + b$), a и b се дадени броеви, $a \neq 0$.

Пример 2

Дадена е линеарната функција: $y = 2x - 3$

- Најди колку е y за: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.
- Објасни како добиените координатни парови ја претставуваат функцијата.

Решение:

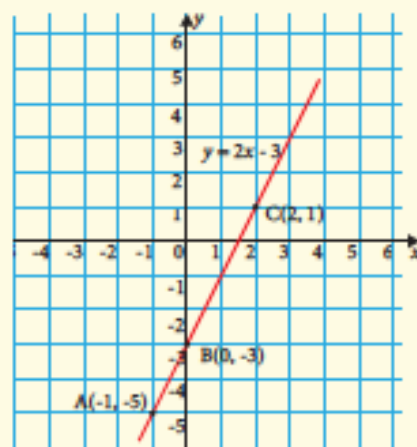
- Пресметувањето на секоја вредност на y за дадените вредности на x е прикажано во табелата:

x	-1	0	2
Пресметување на y	$y = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3$	$y = 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3$	$y = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3$
y	-5	-3	1

Од табелата можеме да ги воочиме следните координатни парови: $(-1, -5)$, $(0, -3)$, $(2, 1)$.

Координатен пар е подреден пар броеви (x, y) кој ја одредува положбата на една точка во координатниот систем.

Првиот број во секој координатен пар претставува – координата (апсциса), што значи дека ја претставува вредноста на независната променлива. Вториот број во секој координатен пар претставува – координата (ордината), што значи дека ја претставува вредноста на зависната променлива y . Ако добиените координатни парови од пример 2 ги нанесеме во координатниот систем, ги добиваме точките кои одговараат на секој пар. Со поврзување на точките се добива права која ја претставува графикот на линеарната функција.



Пример 3

Дали координатниот пар $(1, 5)$ е точка од графикот на линеарната функција од пример 2 ($y = 2x - 3$)?

Решение:

Дали $(1, 5)$ е точка од графикот на $y = 2x - 3$ може да се провери на два начина, и тоа:

I начин: Бидејќи е нацртан графикот на функцијата $y = 2x - 3$, може да ја најдеме точката што има координати $(1, 5)$. Треба да провериме дали точката лежи на правата која е график на функцијата $y = 2x - 3$?

II начин: Со замена за $x = 1$, а за $y = 5$ во равенката $y = 2x - 3$ на линеарната функција се добива $5 = 2 \cdot 1 - 3$, $5 \neq -1$. Бидејќи се добива неточно бројно равенство, подредениот пар не е решение на равенката на линеарната функција, односно точката со координати $(1, 5)$ не е точка од правата (графикот на линеарната функција) $y = 2x - 3$.

Задача 1

Провери кои од координатните парови ги задоволуваат условите на линеарната функција $y = x - 1$?

- а) $(1, 0)$ б) $(2, 2)$ в) $(-1, 2)$ г) $(-2, -3)$ д) $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

Задача 2

Нацртај го графикот на линеарните функции:

- а) $y = 3x$ б) $y = 2x - 4$ в) $y = -x + 2$
 г) $y = -4x$ д) $y = -3x - 1$

Задача 3

Кога телефонира Симеон, тој плаќа основна цена од 50 денари, плус 10 денари за секоја минута разговор. Направи табела за вкупната цена за 1, 2, 3 и 4 минути разговор.

Пример 4

Во еден ресторан цената на оброкот зависи од бројот на порции што се нарачуваат. Вредноста на сметката може да се пресмета со функцијата $y = 3x + 5$, каде што x претставува бројот на порции, а y е вкупната цена во евра.

- а) Најди ги координатните парови за $x = 1$, $x = 3$ и $x = 5$.
 б) Нацртај го графикот на оваа функција во координатниот систем.
 в) Што претставува вредноста 5 во оваа ситуација? Што значи 3?
 г) Ако студент нарача 4 порции, колку ќе изнесува неговата сметка?

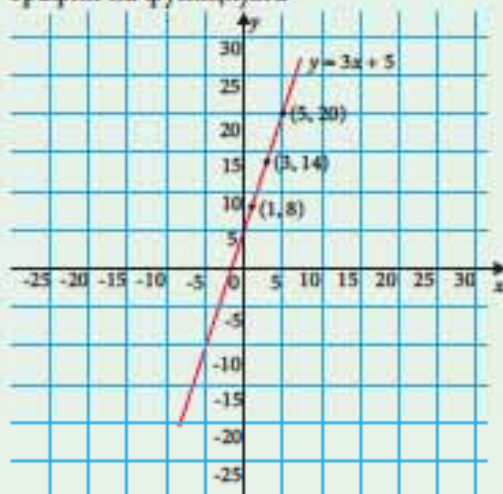
Решение:

- а) Ја пресметуваме вредноста на y за секоја вредност на x , за $x = 1$, $y = 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$, за $x = 3$, $y = 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$ и за $x = 5$, $y = 3 \cdot 5 + 5 = 15 + 5 = 20$. Може да се пополни табелата

Број на порции x	1	3	5
Вкупна цена во евра y	8	14	20

Од табелата можеш да ги запишеш координатните парови: $(1, 8)$, $(3, 14)$, $(5, 20)$.

- б) График на функцијата



- в) Вредноста 5 во равенката претставува почетната цена, што значи дека без разлика колку порции ќе се нарачаат, почетната цена е 5 евра (на пример, за резервација на маса во ресторанот). Бројот 3 пред променливата x , односно пред бројот на нарачани порции е цената за 1 порција (односно 3 евра чини 1 порција).
- г) Ако студент нарача 4 порции, за да ја пресметаме вкупната сума, заменуваме за $x = 4$ во функцијата $y = 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$. Значи, сметката за 4 порции ќе изнесува вкупно 17 евра.

Задача 4

Валбона штеди по 200 денари секоја недела. Првично имала 500 денари.

- а) Напиши ја функцијата што ја опишува заштедата на Валбона.
б) Направи табела за првите пет недели.
в) Нацртај го графикот.

Нацртај ги графиците на линеарните функции $y = x + 3$ и $y = -x - 3$. Објасни ја разликата меѓу графиците на двете функции.

Во тетратка запиши ги одговорите и објаснувањата.

1. Разбирам што е линеарна функција. Да/Не
(Објасни како ја разбираш функцијата.)
2. Знам како да го пресметам y за дадена вредност на x во функцијата. Да/Не
(Напиши пример.)
3. Мојам да нацртам график на функцијата со нанесување координатни парови и поврзување на точките? Да/Не (Опиши како го нацрта графикот.)

Колку се чувствувам сигурен во оваа лекција?

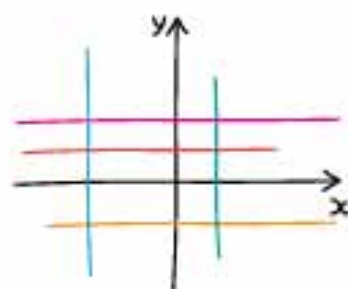
Многу сигурен/Делумно сигурен/ Не сум сигурен (Објасни зошто.)

Самостојна работа

1. Во продавница за електроника цената на телевизорите се намалува по 500 денари за секој ден откако ќе почне попустот.
 - а) Ако почетната цена на телевизорот била 15000 денари, запиши ја формулата за цената на телевизорот во зависност од денот x .
 - б) Најди ја цената за 3, 5 и 7 дена.
 - в) Нацртај го графикот на функцијата.
2. Во автобуска компанија трошокот за патување од град А до град Б се пресметува со формулата $y = 30x + 10$, каде што x претставува бројот на километри, а y е трошокот во денари.
 - а) Најди го трошокот за патување од 100 километри и 250 километри.
 - б) Нацртај го графикот на функцијата.
3. Ристо работи во продавница за електроника. Неговата основна дневна заработувачка е 1000 денари, а добива плус 200 денари за секој продаден производ.
 - а) Запиши ја формулата за неговата заработка y зависно од бројот на производи што ќе ги продаде.
 - б) Најди колку ќе заработи ако продаде 3, 4 и 6 производи.
 - в) Нацртај го графикот.
4. Во книжарницата каде што купува Исак, за купени повеќе од 3 книги тој добива попуст од 5 евра на вкупната цена. Формулата за цената за купување книги, ако една книга чини 4 евра, е $y = 4x - 5$. Најди ја цената за 5 и 7 книги и нацртај го графикот.
5. Изнајмувањето на еден велосипед чини 100 денари на ден. Освен тоа, секој што сака да изнајми велосипед мора да плати и членарина од 50 денари.
 - а) Напиши формула за вкупната цена што ја плаќа една личност кога изнајмува велосипед за неколку дена.
 - б) Колку ќе плати личност што изнајмува велосипед за 2 дена? А за 4 дена?

Графици на линеарни функции паралелни на x - или y -оската

Во оваа лекција ќе се запознаеш со функции чии графици се паралелни на x -оската или y -оската. Ќе научиш како да ги препознаваш овие функции и како да ги црташ нивните графици. Функциите паралелни на x -оската имаат константна вредност за y , додека функциите паралелни на y -оската имаат константна вредност за x . Оваа лекција ќе ти помогне да ги разбереш основните карактеристики на овие функции и да се запознаеш со нивното претставување со график.



Пример 1

Изработи мисловна мапа за линеарна функција. Провери ја твојата мапа со користење на претходната лекција.

Задача 1

Нацртај график за линеарната функција $y = 2x - 3$. Колку е коефициентот a пред независната променлива x и коефициентот b ?

Пример 2

Нацртај го графикот на функцијата $y = 0 \cdot x + 4$.

Решение:

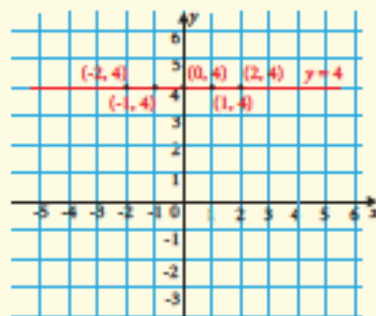
За функцијата $y = 0 \cdot x + 4$, коефициентот пред независната променлива x е 0. Пред да го нацртаме графикот ќе направиме табела. Бидејќи секоја вредност за x помножена со 0 е нула, тогаш вредноста на y е 4 за секоја вредност на x .

x	-2	-1	0	1	2
y	4	4	4	4	4

На секој од добиените координатни парови $(-2, 4)$, $(-1, 4)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ ја придружуваме соодветната точка во координатниот систем.

Со поврзување на точките добиваме хоризонтална права, паралелна на x -оската.

Формулата на функцијата можеме да ја запишеме и како $y = 4$. Ова е константна функција бидејќи за секоја вредност на x , вредноста на y е 4.



Пример 3

Нацртај го графикот на функцијата $x = -2$.

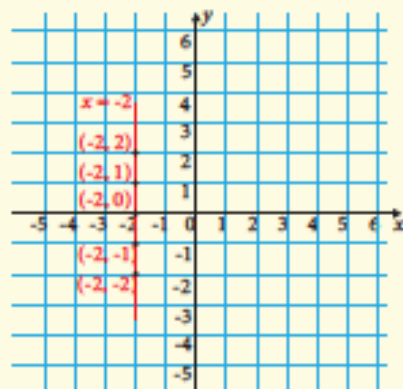
Решение:

Во функцијата $x = -2$, x има константна вредност.

Тоа значи дека за која било вредност на y , x има вредност -2 . Тоа може да се прикаже:

x	-2	-2	-2	-2	-2
y	-2	-1	0	1	2

За секој координатен пар $(-2, -2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$ ја наоѓаме точката во координатниот систем. Со поврзување на точките добиваме вертикална права, паралелна на y -оската.



Задача 2

Нацртај ги графиците на функциите:

- а) $y = -2$ б) $x = 3$ в) $x = 1\frac{1}{2}$ г) $y = 5$ д) $y = -2\frac{1}{3}$

Пример 4

Во лабораторија се испитува уред кој одржува постојана температура во затворена просторија. Без оглед на времето што поминува, температурата е секогаш 22°C .

- а) Запиши ја функцијата $T(t)$ која ја опишува температурата во зависност од времето t , каде што t е бројот на часови што поминале (ќе сметаме и негативен – пред почетокот на мерењето).
- б) Нацртај го графикот на функцијата и објасни каков е.

Решение:

- а) Функцијата е $T(t) = 22$, каде што t е бројот на часови што поминале (ќе сметаме и негативен број – пред почетокот на мерењето).

- 6) Ова значи дека за секој час во текот на мерењето и пред мерењето температурата останува на 22°C . За да го нацртаме графикот, означуваме неколку точки на координатниот систем: $(-2, 22)$, $(-1, 22)$, $(0, 22)$, $(1, 22)$, $(2, 22)$, $(3, 22)$. Со поврзување на овие точки се добива графикот на функцијата $y = 22$.

Графикот ќе биде хоризонтална права паралелна со x -оската, што значи дека температурата останува константна.



Размисли за две функции: едната се запишува во обликот $y = m$, а другата во обликот $x = n$. Како изгледа графикот на секоја од овие функции (на кои оски се паралелни и зошто)? Како може ова знаење да ти помогне при решавање реални проблеми?

Во твојата тетратка реши ги задачите:

1. Која е разликата меѓу функциите од обликот $y = b$ и $x = a$?
2. Кои од функциите: $y = -1$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 4.5$ имаат график, права паралелна со y -оската?
3. Нацртај ги графици на функциите $y = -3$ и $x = 2$.
4. Напиши проблем од секојдневниот живот кој ќе се решава со користење една од функциите $y = b$ и $x = a$.

Врати се на лекцијата и провери дали точно си решавал.

Ако имаш 2 неточни задачи, треба да се фокусираш на повторно учење и вежбање на графици на линеарни функции од обликот $y = b$ и $x = a$.

Ако си решил 3 или 4 задачи, се смета дека си успешен во оваа лекција.

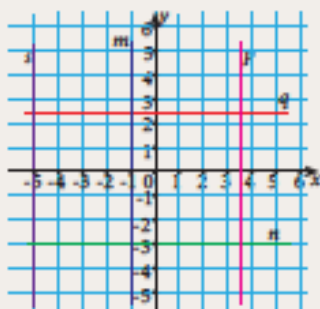
Самостојна работа

1. Во една училишна сала клима-уредот е поставен така што температурата во собата се одржува постојано на 17°C , без разлика на времето од денот.
 - а) Напиши функција која ја опишува температурата во собата.
 - б) Нацртај го графикот на функцијата.
2. Во локалниот ресторан дневниот специјалитет секогаш се продава по фиксна цена од 150 денари, без разлика на денот.
 - а) Изрази ја врска на цената и денот како функција.
 - б) Нацртај го графикот на функцијата.

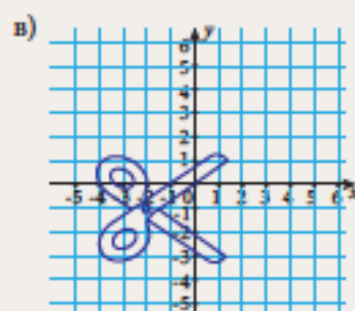
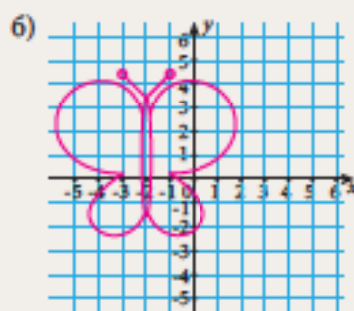
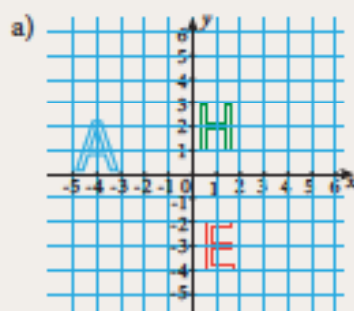
3. Во паркот, автоматот за топли пијалаци прима секогаш точно 100 денари, без разлика на видот или бројот на пијалациите што може да се добијат.

- а) Запиши функција која ја опишува влезната сума во автоматот.
б) Нацртај го графикот на функцијата.

4. Напиши ги равенките на дадените прави.



5. Запиши ги равенките на оските на симетрија на следниве форми:



6. а) Означи ги точките $(-4, 3)$, $(-4, 5)$, $(-4, 0)$, $(-4, 2)$, $(-4, -3)$ на координатниот систем. Запиши ја равенката на правата што минува низ овие точки.
б) Означи ги точките $(-4, 5)$, $(-3, 5)$, $(2, 5)$, $(0, 5)$, $(4, 5)$ на координатниот систем. Запиши ја равенката на правата што минува низ овие точки.
7. На координатен систем нацртај форма за која правите $x = 3$ и $y = 4$ се оски на симетрија.
8. Точките $M(2, 3)$, $N(-1, 5)$, $P(-4, 3)$ и $Q(-1, -1)$ се темиња на делтоид.
а) Нацртај го делтоидот во координатен систем.
б) Запиши ги равенките на правите на кои лежат дијагоналите на делтоидот, соодветно.
9. Дадени се точките $A(2, 4)$, $B(2, -3)$, $C(1, 4)$, $D(2, -2)$, $E(2, 6)$ Која од точките не припаѓа во групата? Објасни го твојот одговор.

Т Е М А

4

МЕРЕЊЕ



Замисли еден ден во кој ништо не може да се измери. Како би знаеле колку е часот, колку километри сме поминале, колкава маса има еден предмет или колку време треба да вариме чај? Мерењето е постапка со која ги споредуваме величините на предметите со избрани мерни единици и на тој начин ги одредуваме нивната должина, маса, волумен, време или некоја друга големина.

**„Мерењето е уметност да бидеш точен
– без него сè би било само приближно.“**

Резултати од учењето

По изучувањето на оваа тема ќе бидеш способен/а да:

- избираш соодветни мерни единици за процена, мерење, пресметување и решавање проблеми во секојдневен контекст;
- црташ и толкуваш графици од реалниот живот вклучувајќи повеќе од една фаза, на пример, график за време на патување;
- решаваш проблеми од секојдневни ситуации со пресметување периметар на четириаголник, плоштина на сложени 2Д-форми и волумен на квадар и на коцка.

Мерни инструменти за должина и мерни единици. Микрон

Во оваа лекција ќе се запознаеш со два типа мерни инструменти кои се користат за мерење на должина, а тоа се аналогни и дигитални инструменти. Овие инструменти се клучни за точноста и прецизноста во различни научни, технички и индустриски области.

Аналогните инструменти за мерење, како што се мерни линијари и шублери, се вообичаени и лесни за употреба, но бараат внимателност и интерпретација на читањето. Дигиталните инструменти, пак, користат електронски дисплеи и автоматски покажуваат точни вредности, што ги прави посовремени и погодни за прецизни мерења.



Особено ќе се фокусираш на мерење многу мали должини и дебелини, што бара употреба на микронски инструменти. Микронскиот инструмент е идеален за мерење многу мали димензии, како што е дебелината на материјали или прецизноста на делови во машинството и електрониката. Притоа ќе се запознаеш со мерната единица микрометар и нејзино претворање во метри и милиметри.

Пример 1

Милан реши да направи рамка за слика. За тоа ќе му бидат потребни различни должини на дрвени летви. Тој има мерни инструменти со мерни единици за должина во сантиметри и метри. Помогни му да ги изврши пресметките и одговори на прашањата:

- Ако Милан има дрвена летва која е долга 3 метри и ја дели на 100 дела, колку сантиметри ќе има секој дел?
- Милан треба да искористи две летви: една е 1,5 метар, а другата е 150 сантиметри. Колку се долги заедно во сантиметри? (Запиши ги постапката и резултатот.)
- Ако Милан треба да купи 5 летви, секоја долга 2 метра, колку ќе биде вкупната должина на летвите во сантиметри?
- Запиши ја вкупната должина на летвите ако Милан има летва од 2 метра и летва од 850 сантиметри. Како ќе ја запишеш оваа должина во метри и во сантиметри?
- Милан проценил дека секоја дрвена летва е долга околу 4 метри. Ако секоја летва има точна должина од 3,7 метри, пресметај ја вкупната должина на 5 такви летви. Колкава е разликата помеѓу проценетата и точната вкупна должина?

Решение:

а) $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$, $300 \text{ cm} : 100 = 3 \text{ m}$

б) $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$, вкупна должина $150 \text{ cm} + 150 \text{ cm} = 300 \text{ cm}$

в) $5 \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$

г) $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$, $200 \text{ cm} + 850 \text{ cm} = 1050 \text{ cm}$, $1050 \text{ cm} = 10 \text{ m } 50 \text{ cm}$

д) Милан проценува дека секоја летва е 4 метри. Значи проценетата вкупна должина е $5 \cdot 4 = 20 \text{ m}$.

Ако секоја летва е 3,7 метри, сите 5 летви имаат вкупна должина: $5 \cdot 3,7 \text{ m} = 18,5 \text{ m}$.

Разликата меѓу проценетата и точната вкупна должина е $20 - 18,5 = 1,5 \text{ m}$.

Задача 1

Градот планира да изгради мал мост преку поток за велосипедска патека. Ти си дел од тимот кој треба да измери и одреди точни димензии за мостот. Во врска со градбата се дадени следните податоци:

- Ширината на потокот е 4,25 m.
 - Мостот има должина која од двата краја на потокот е за 0,5 m поголема од ширината на потокот.
 - Ширината на мостот треба да биде 3 пати помала од неговата должина.
- а) Кои мерни инструменти ќе ги користиш за да ги измериш должините на терен?
 б) Колку ќе биде вкупната должина на мостот?
 в) Колкава ќе биде ширината на мостот?
 г) Доколку користиш метар со милиметарска поделба, како ќе го претставиш точното мерење во сантиметри и милиметри?

Пример 2

Анета е љубител на биологија и сака да ги проучи разликите помеѓу различни растителни влакна. Таа сака да измери дебелина на влакната од листот на една трева. Нејзиниот наставник ѝ кажува дека дебелината на едно влакно обично се мери во микрони (μ - ми).

1 микрон (μ) е еднаков на милионити дел од метарот.

Користејќи соодветни инструменти за мерење многу мали должини, Анета дошла до заклучокот дека дебелината на влакното на тревата е $50 \mu\text{m}$.

Должината еднаква на милионити дел од метарот во SI е именувана со микрометар, ознака μm ($1 \text{ mm} = 1000 \mu\text{m}$).

Пократка ознака за микрометар е микрон, односно $1 \mu\text{m}$ или 1μ . Означувањето на оваа должина со микрон (μ) е повлечено од употреба во 1967 година.

- а) Претвори ја дебелината од микрони во милиметри.
- б) Ако дебелината на човечко влакно е приближно $70\ \mu\text{m}$, кое влакно е потенко, влакното од листот или човечкото? Колкава е разликата во микрони меѓу двете влакна?
- в) За да ја замислиш големината, пресметај колку вакви влакна би можеле да се наредат едно до друго за да формираат должина од 1 милиметар.
- г) Зошто е важно во науката да се користат микрометри за мерење вакви многу мали димензии?

Решение:

- а) Користејќи ја врската меѓу милиметри и микрони, ако дебелината на влакното е $50\ \mu\text{m}$, тогаш: $50\ \mu\text{m} = (50 : 1000)\ \text{mm} = 0,05\ \text{mm}$. Дебелината на влакното е $0,05\ \text{mm}$.
- б) Ако дебелината на човечкото влакно е $70\ \mu\text{m}$, а дебелината на влакното на тревата е $50\ \mu\text{m}$, тогаш разликата помеѓу нив е: $70\ \mu\text{m} - 50\ \mu\text{m} = 20\ \mu\text{m}$. Влакното на тревата е потенко за $20\ \mu\text{m}$.
- в) За да ја замислиш големината, треба да пресметаш колку влакна од $50\ \mu\text{m}$ можат да се наредат за да формираат влакно од 1 mm. Од тоа што $1\ \text{mm} = 1000\ \mu\text{m}$ се добива $1000\ \mu\text{m} : 50\ \mu\text{m} = 20$.
Значи, кога 20 влакна од $50\ \mu\text{m}$ би се наредиле едно до друго, ќе се добие должина од 1 mm.
- г) Користењето на микронот (μm) во науката е многу важно за точно мерење мали димензии, како што се клеточните структури, микроскопските предмети или влакна. Микроните дозволуваат висока точност при мерење нешта што се премали за да се измерат со обични мерни инструменти кои мерат сантиметри или милиметри. Ова е особено корисно во биологијата, медицината и технологијата, каде што деталите на микрониво имаат големо значење за разбирање на процесите и функциите.

Задача 2

Еден научен експеримент бара прецизно определување на димензиите на многу мал предмет во форма на квадар. Мерењата се дадени во различни единици: должината на предметот е $2500\ \mu\text{m}$, ширината на предметот е $0,75\ \text{mm}$ и висината на предметот е $0,05\ \text{cm}$.

- а) Претвори ги сите димензии во милиметри.
- б) Претвори ги сите димензии во микрони.
- в) Колку пати должината на предметот е поголема од висината?

Пример 3

Електроинженер изработува печатена плоча за електронски уред. Димензиите на плочата се дадени во различни единици: должината на плочата е $15\ \text{cm}$, ширината на плочата е $85\ \text{mm}$ и дебелината на плочата е $1200\ \mu\text{m}$.

- а) Претвори ги сите димензии во милиметри.
- б) Претвори ги сите димензии во микрони.

- в) Ако секој слој на плочата има дебелина од $1200\ \mu\text{m}$, колку најмногу слоеви може да се наредат еден врз друг во кутија со висина $2\ \text{cm}$?

Решение:

- а) Претворање во милиметри:

$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}, 1\ \mu\text{m} = 0,001\ \text{mm}$$

- Должина: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10)\ \text{mm} = 150\ \text{mm}$
- Ширина: $85\ \text{mm}$ - веќе е во милиметри
- Дебелина: $1200\ \mu\text{m} = (1200 \cdot 0,001)\ \text{mm} = 1,2\ \text{mm}$

- б) Претворање во микрони:

$$1\ \text{mm} = 1000\ \mu\text{m}, 1\ \text{cm} = 10000\ \mu\text{m}$$

- Должина: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10000)\ \mu\text{m} = 150\ 000\ \mu\text{m}$
- Ширина: $85\ \text{mm} = (85 \cdot 1000)\ \mu\text{m} = 85\ 000\ \mu\text{m}$
- Дебелина: $1200\ \mu\text{m}$ веќе е во микрони

- в) Пресметка на број на слоеви:

- Максимална висина на кутијата: $2\ \text{cm} = 20\ \text{mm}$
- Дебелина на еден слој: $1,2\ \text{mm}$

$$\text{Број на слоеви} = 20\ \text{mm} : 1,2\ \text{mm} = 16,6$$

Бидејќи не може да има дел од слој, максималниот број на слоеви е 16.

Задача 3

Петар сака да ја измери дебелината на три различни слоја облека кои ги користи во зимски услови. За ова користи посебни мерни инструменти и ги добива следниве мерења:

- Дебелина на слојот од внатрешноста на зимската јакна: $450\ \mu\text{m}$.
 - Дебелина на слојот од зимскиот џемпер: $800\ \mu\text{m}$.
 - Дебелина на слојот од надворешноста на зимската јакна: $1\ 250\ \mu\text{m}$.
- а) Претвори ги дебелините на сите три слоја од микрони (μm) во милиметри (mm).
- б) Која од облеките е најдебела? Која е најтенка? Колкава е разликата во микрони помеѓу најтенката и најдебелата облека?
- в) Колку од секој слој ќе треба да наредиме еден врз друг за дебелината на добиената комбинација да биде $5\ \text{cm}$?
- г) Објасни зошто е важно да се користат микрони (μm) при мерењето на дебелината на различни материјали, како што е облеката. Како ова може да помогне во дизајнирањето зимска облека?

Задача 4

Прочитај ја должината прикажана на различните мерни инструменти и за секој инструмент запиши дали е аналоген или дигитален.



Петар, кој живее во студен регион, треба да избере која зимска облека ќе ја носи за да се заштити од студеното време. Тој ги измерил дебелините на трите слоја облека (поларна јакна, зимски џемпер и зимска јакна), но сака да знае како дебелината на облеката влијае врз нејзината изолација. Ако облеката што има поголема дебелина ја задржува топлината поефикасно, како ќе ја искористиш оваа информација за да му помогнеш на Петар да избере најдобра зимска облека за различни температурни услови?

Објасни како знаењето за микрони и дебелината на слоевите може да помогне во донесувањето на одлуката за облекување во зимски услови. Истражувај за карактеристиките на различни видови облека во зависност од дебелината.

Одговори ги прашањата во твојата тетратка, а потоа сподели ги со твоите соученици.

1. Разбрав што е микрон (μm) и како се користи при мерењето мали димензии.
(Да / Не)
Ако не, кои делови од објаснувањето или решавањето на проблемот ми беа нејасни?
2. Дали успеав да ги претворам мерните единици правилно (микрони во милиметри)? (Да / Не)
Ако не, како би го подобрил/а процесот на претворање?
3. Што научив за тоа како мерењето на микрони помага во различни научни и практични ситуации?
Напиши краток одговор на ова прашање за да го сумираш наученото.

Самостојна работа

- Претвори.
 - 3,5 километри во метри.
 - 250 милиметри во сантиметри.
- Растојанието од куќата на живеење до училиштето е 546 метри. Запиши го растојанието со повеќеимен број.
- Претвори 3,25 m во
 - cm
 - dm
 - dam
- За да ја процениш и потоа точно да ја измериш должината на масата во твојата училница, следи ги овие чекори:
 - Процена на должината:
 - Погледни ја масата и обиди се да ја споредиш со познат објект чија должина ја знаеш, на пример, лист хартија од А4-формат (кој е долг приближно 30 cm) или должината на твојата рака.
 - Врз основа на оваа споредба, направи приближна проценка на должината на масата.
 - Мерење со мерни инструменти:
 - Користи соодветен мерен инструмент, како што е метар или линијар, за точно да ја измериш должината на масата.
 - Постави го мерниот инструмент по должината на едната страна на масата и забележи ја измерената должина.
 - Доколку мерниот инструмент е пократок од должината на масата, направи повеќе мерења и собери ги за да ја добиеш вкупната должина.
 - Споредба на процената со мерењето:
 - Спореди ја твојата почетна проценка со точната измерена должина.
 - Забележи ја разликата помеѓу процената и мерењето и размисли за можните причини за таа разлика.

Оваа активност ќе ти помогне да ги подобриш твоите вештини за проценка и мерење, како и да разбереш колку е важна прецизноста при мерењето должини.
- Кој именуван број е поголем: 5 метри или 520 сантиметри? За колку?
- Пресметај го периметарот на следниве многуаголници ако се дадени должините на нивните страни.
 - Правоаголник со страни 4 m и 6 m.
 - Триаголник со страни 5 cm, 8 cm и 5 cm.
 - Правилен пентаголник со страна 3 m.
- Марко има украсна лента од 1500 mm. Претвори ја оваа должина во повеќеимен број.

8. Измери должина со помош на линијар и запиши ја во сантиметри и милиметри. Каква е точноста на мерењето што го доби? Кои се границите на мерењето со овој инструмент?

*9. Користејќи микрометар, измери дебелина на некое малечко метално влакно или жица. Запиши го мерењето во микрони (μm) и претвори го во милиметри. Како микрометарот овозможува точно мерење на малите димензии? Дали може да се користи микрометар за мерење поголеми предмети? Зошто да или зошто не?



Мерни инструменти за маса и претворање на мерни единици за маса

Во оваа лекција ќе се фокусираш на важноста за точноста при мерењето маса. Ќе се потсетиш како да ги читаш скалите на аналогни и дигитални мерни инструменти за маса, како да ги користиш соодветните мерни единици и ознаки при мерењето.

Особено ќе обрнеш внимание на претворањето на мерните единици за маса користејќи ги односите меѓу различните единици. Овие вештини се неопходни за прецизни пресметки и процени, кои можат да бидат корисни во различни области, како што се наука, индустрија, здравство и секојдневниот живот.

Пример 1

Кои од мерните инструменти за маса се аналогни, а кои дигитални?

1)



2)



3)



4)



Пример 2

Марко и Јана се ангажирани во проект за изработка на етикети со прецизни мерки на масата на различни материјали кои се користат во фабриката за пакување. Тие треба да ја мерат масата на различни предмети користејќи различни мерни инструменти и единици. Во процесот ќе се користат и аналогни и дигитални ваги за мерење, а, исто така, ќе треба да ги претворат единиците од една во друга за да добијат точни резултати и да ги запишат податоците.

- Марко користи аналогна вага која има скала со поделки на секои 100 грама. Тој ја мери масата на парче алуминиум и ја чита вредноста на скалата. Ако стрелката се наоѓа по седмата поделка по 100 грама на третата поделка по 10 грама, колку е вкупната маса на парчето алуминиум?
- Јана користи дигитална вага која директно покажува маса во килограми. Дигиталната вага покажува 2,850 kg за голем пакет. Колку тоа ќе биде во грамови? (Запиши ја постапката за претворање на единиците).
- Марко треба да запише податок за масата на пакување на 5 пакети од кои секој има маса од 3,2 kg. Колку ќе биде вкупната маса на сите пакети ако ја запишеме во грамови? Колку ќе биде вкупната маса ако ја запишеме во тони?
- Јана проценува дека масата на еден пакет е 3 килограми. Користејќи ја дигиталната вага, мерењето покажува 3,4 kg. Колку е разликата меѓу процената и мерењето? Колку проценти од точната маса (3,4 kg) изнесува проценетата маса (3 kg)?
- Во фабриката за пакување се потребни 5,5 t храна која треба да се спакува во пакети со маса од по 2 kg. Колку пакети ќе се добијат? Колку е масата на целата храна во грамови?

Решение:

а) Масата на парчето алуминиум е: $7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 = 700 + 30 = 730 \text{ g}$.

б) Масата во грамови е: $2,850 \text{ kg} = (2,850 \cdot 1000) \text{ g} = 2850 \text{ g}$.

в) Вкупната маса во грамови е: $5 \cdot 3,2 \text{ kg} = 16 \text{ kg} = 16000 \text{ g}$.

Вкупната маса во тони е: $16 \text{ kg} = 0,016 \text{ t}$.

г) Разликата помеѓу процената и точните мерења е: $3,4 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 0,4 \text{ kg}$.

За да определиме колку е во проценти проценетата маса во однос на точната маса, треба да го определиме количникот $3 : 3,4$, но во овој случај се добива бесконечен децимален број, па за да избегнеме губење од точноста поради заокружување на резултатот, ќе го претставиме делењето како количник на две дропки, односно $\frac{3}{1} : \frac{34}{10} = \frac{3}{1} \cdot \frac{10}{34} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$. Во проценти имаме: $\frac{15}{17} \cdot 100 = \frac{1500}{17} = 88\frac{4}{17}\%$. Запиши ги процентите како децимален број со две децимали.

Ова значи дека процената на Јана е $88\frac{4}{17}\%$ од точната измерена маса.

д) Бројот на пакети е $5,5 \text{ t} = 5500 \text{ kg}$, $5500 \text{ kg} : 2 \text{ kg} = 2750$ пакети

Масата на целата храна во грамови е $5,5 \text{ t} = 5500 \text{ kg} = (5500 \cdot 1000) \text{ g} = 55000000 \text{ g}$.

Задача 1

Ана треба да измери маса на пакет со пченица користејќи аналогна вага. На скалата на вагата стрелката покажува 4 поделки по 1 килограм и уште 5 помали поделби, при што секоја поделба изнесува 100 грама. Колку е вкупната маса на пакувањето во килограми и во грамови?

Задача 2

Зоки измерил маса на 3 пакети со чоколадо. Првиот пакет има маса од 1250 g, вториот 0,5 kg, а третиот 300 g. Колку е вкупната маса на сите три пакети во килограми?

Задача 3

На полица во аптека стојат кутии со различни пакувања лекови. Една кутија содржи 14 таблети од по 400 mg, друга кутија 10 таблети по 325 mg и во трета кутија има 20 кесички од по 15 g. Пресметај ја вкупната маса на лековите ако на таа полица има по 10 кутии од секој вид лек. Изрази ја вкупната маса во грамови, во декаграми и во хектограми.

Пример 3

Една кутија чоколади има маса од 2,5 kg. Во магацинот има 48 такви кутии.

- Колку маса во килограми имаат сите кутии заедно?
- Претвори ја вкупната маса на кутиите во грамови.
- Еден камион може да носи максимум 1,2 t товар. Дали овој товар може да се пренесе со еден камион? Ако не, колку тони ќе треба да се транспортираат дополнително со втор камион?

Решение:

- Масата на сите кутии се добива со множење на бројот на кутии со масата на една кутија: $48 \cdot 2,5 = 120 \text{ kg}$.
- Вкупната маса од 120 kg ја претворај во грамови: $120 \text{ kg} = (120 \cdot 1000) \text{ g} = 120000 \text{ g}$.
- За да одговориш на ова прашање, прво треба да ја претвориш масата што може да ја носи камионот од тони во килограми: $1,2 \text{ t} = (1,2 \cdot 1000) \text{ kg} = 1200 \text{ kg}$.
Потоа споредуваме: $120 \text{ kg} < 1200 \text{ kg}$. Да, целиот товар може да се пренесе со еден камион бидејќи масата на кутиите е помала од капацитетот на камионот.

Задача 4

Во фабрика за брашно се пакуваат кеси со брашно од 4,75 килограми секоја.

- Фабриката произведува 650 кеси во текот на еден ден. Колкава е вкупната маса на брашното во килограми?
- Во еден магацин може да се складираат максимум 3,5 тони брашно. Дали сите кеси произведени за еден ден можат да се складираат во еден магацин?
- Претвори ја вкупната маса на брашното во повеќеимен број.

Кога би работел во продавница или магацин, како би одлучил која мерна единица (грамови, килограми или тони) да ја користиш за различни производи? Објасни зошто е важно правилно да се изберат единиците за маса во секојдневниот живот.

Одговори ги прашањата во твојата тетратка.

1. Дали можам да пресметувам вкупна маса со различни мерни единици (грамови, килограми, тони)? Да / Делумно / Не
2. Дали го разбираам значењето на секоја мерна единица и кога се користи? Да / Делумно / Не
3. Дали успеав да го поврзам знаењето на мерните единици за маса со примери од реалниот живот? Да / Делумно / Не
4. Што би можел да направам подобро следниот пат за полесно да ги решавам ваквите задачи?

Самостојна работа

1. Еден пакет брашно има маса од 3,25 kg. Колкава е масата во хектограми (hg), декаграми (dag) и милиграми (mg)?
2. Ако една кутија чоколади има маса 1,2 hg, во колку такви кутии би се распределило 6 kg чоколада?
3. Една пластична кутија со мед има маса од 5,6 kg, а друга 4,75 kg. Колкава е вкупната маса во hg? Колкава е разликата во масата меѓу двете кутии во dag?
4. Која маса е поголема: 3,5 hg или 3500 mg? Колку пати е едната маса поголема од другата?
5. Еден транспортен пакет содржи 50 пакувања путер, секое со маса од 250 g. Колкава е вкупната маса на пакетот во килограми и хектограми?
6. Една голема тегла џем има маса од 4,125 kg. Претвори ја масата во dag, во g и во hg.
7. Процени колкава маса има една празна чанта и запиши го одговорот во hg. Провери ја точноста со мерење и изрази ја масата во dag.
8. Парче дрво што се користи за изработка на мебел има маса 15 hg. При обработувањето треба да се подели на 3 еднакви дела. Колкава ќе биде масата на секој дел во kg?
9. На вагата е прикажана маса од 0,875 kg. Запиши ја како повеќеимен број.
10. Едно транспортно возило може да пренесе до 2 t. Колку пакувања со маса од 125 килограми може да носи при еден транспорт?

Мерење и мерни единици за зафатнина

Мерењето на зафатнината е клучна вештина во секојдневниот живот и во различни професионални области. Започнувајќи од мерење течности во домаќинството, па сè до сложени инженерски и научни процеси, точноста и разбирањето на мерните единици за зафатнина играат значајна улога.

Со оваа лекција ќе се потсетиш како да читаш скали на аналогни и дигитални мерни инструменти за зафатнина, како што се мензури, дигитални мерачи и други инструменти и ќе се фокусираш на претворањето на единиците за зафатнина, користејќи ги врските меѓу нив. Овие вештини не само што ќе ти помогнат во процената и мерењето, туку и ќе те подготват за реални ситуации каде што се потребни точност и ефективност.

Пример 1

Разгледај ги мерните инструменти за зафатнина. Кој од нив е попрецизен?



Пример 2

Една цистерна може да собере точно 8 хектолитри (hl) течност. За транспорт, течноста се преточува во помали садови со капацитет од 25 литри (l) секој. Колку садови со капацитет од 25 l се потребни за да се испразни целата цистерна?

Решение:

Претворање на хектолитри во литри: $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$, $8 \text{ hl} = (8 \cdot 100) \text{ l} = 800 \text{ l}$

Пресметка на бројот на садови: $800 : 25 = 32$ сада.

Значи, потребни се 32 сада за да се испразни цистерната.

Задача 1

Една фабрика произведува и пакува различни производи, а а ти си дел од тимот кој е задолжен за мерење и пресметка на должина, маса и зафатнина за да се обезбеди точноста во производството и дистрибуцијата.

- 1) Еден пакет производи се складира во пластична кутија со следниве димензии: должина 0,25 dm, ширина 3,2 m и висина 0,1 hm.

- а) Претвори ги сите димензии во m и cm.
 - б) Пресметај го периметарот на основата на кутијата.
 - в) Прочени дали кутијата може да се смести во складиште со висина од 1,5 dm.
- 2) Еден производ има маса од 450 g.
- а) Претвори ја масата на производот во dag, hg и kg.
 - б) Ако во пластичниот сад собира 250 производи, пресметај ја вкупната маса на сите производи и спореди ја со дозволената носивост на кутијата од 120 kg.
- 3) Во пластичниот сад може да се стави течност со зафатнина од 3,24 hl. Колку шишиња од по 800 ml би биле потребни за да се наполни пластичниот сад?
- 4) Напиши ги сите мерења добиени во 1), 2) и 3) како едноимени и повеќеимени броеви. Провери дали твоите процени се точни преку мерења и претворања. Користи децимални броеви со три децимали при претворањата.

Пример 3

Елена сака да направи домашен сок и да го складира во шишиња и канти. Таа подготвила 15 l сок. Дома има 5 шишиња со зафатнина од по 750 ml, како и 2 канти со зафатнина од по 5 l.

- а) Дали ќе може да го складира целиот сок во шишињата и кантите? Ако не, колку сок ќе остане?
- б) Едно шише има маса од 250 g кога е празно. Сок со зафатнина од 1 l има маса од 1 kg. Ако шишето се наполни со сок, која е вкупната маса на шишето кога е полно?
- в) Колку ќе изнесува вкупната маса на сокот, празните шишиња и празните канти ако секоја канта има маса од 1,5 kg?

Истражувај за односот на масата со зафатнината или колкава е масата на течност која има 1 литар зафатнина. Тој однос може да се изрази како $\frac{\text{маса (kg)}}{\text{зафатнина (l)}}$. Можеш да го прашаш и твојот наставник по физика што значи поимот густина и со кои мерни единици се изразува.

Решение:

- а) Зафатнина на 5 шишиња: $5 \cdot 750 \text{ ml} = 3750 \text{ ml}$ или 3,75 l
 Зафатнина на 2 канти: $2 \cdot 5 \text{ l} = 10 \text{ l}$
 Вкупна зафатнина: $3,75 \text{ l} + 10 \text{ l} = 13,75 \text{ l}$
 Останат сок: $15 \text{ l} - 13,75 \text{ l} = 1,25 \text{ l}$
 Значи, не може да се складира целиот сок, односно ќе останат 1,25 литри.
- б) Маса на едно полно шише:
 Маса на празното шише = 250 g
 Маса на сокот во полно шише со зафатнина 750 ml (1 литар сок има маса 1 kg) = 750 g
 Вкупната маса = $250 \text{ g} + 750 \text{ g} = 1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$
- в) Вкупна маса на сокот и садовите:
 Маса на сокот = зафатнина (литри) $\cdot$ маса на 1 литар сок = $15 \cdot 1 = 15 \text{ kg}$
 Маса на 5 шишиња: $5 \cdot 0,25 \text{ kg} = 1,25 \text{ kg}$
 Маса на 2 канти: $2 \cdot 1,5 \text{ kg} = 3 \text{ kg}$
 Вкупна маса: $15 \text{ kg} + 1,25 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 19,25 \text{ kg}$

Задача 2

Иван работи на проект за одржување хидропоничен систем - метод на одгледување растенија без употреба на почва. Системот бара резервоари за вода и хранливи раствори со одредена зафатнина. Иван има два резервоара, едниот со зафатнина од 18,5 l, а другиот со зафатнина од 12,75 l. Тој треба да наполни вкупно 40 l течност во двата резервоара и шишиња од по 1,25 l.

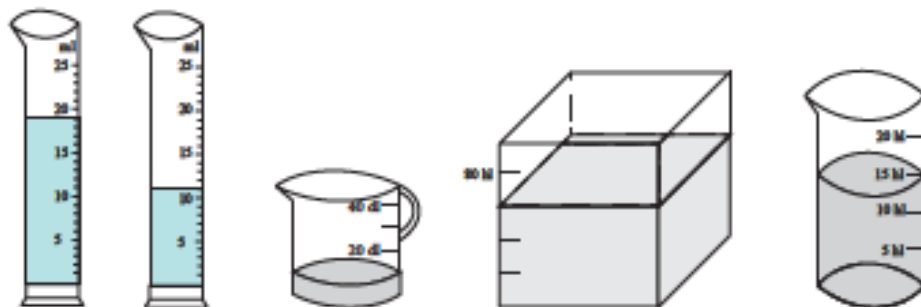
- Колку шишиња со зафатнина од 1,25 l ќе му бидат потребни за да го складира вишокот течност што нема да го собере во резервоарите?
- Ако Иван сака да го наполни резервоарот од 12,75 l до 75 % од неговата вкупна зафатнина, колку литри ќе му бидат потребни?
- Ако Иван користи однос 3:2 за вода и хранлив раствор, колку литри од секоја течност ќе додаде за да го наполни резервоарот од 18,5 l?

Задача 3

Еден литар нафта има маса 0,8 kg. Во еден резервоар собира 400 kg нафта. Колку е зафатнината на резервоарот?

Задача 4

Запиши ја зафатнината што е прикажана на секоја од сликите:



Задача 5

Јована подготвува супа за семејството. Во рецептот пишува дека ѝ се потребни 2,5 l вода за супата. Таа има дигитален мерен инструмент со скала во милилитри и бокал со максимален капацитет од 1,2 l.

- Пресметај колку пати ќе треба да го наполни бокалот за да ја добие потребната количина вода.
- Ако Јована го полни бокалот до максималниот капацитет само два пати, колку вода ќе недостига?
- Користејќи го дигиталниот инструмент, Јована забележува дека во садот во кој ја подготвува супата претходно веќе имало 750 ml вода. Колку пати ќе дополни со бокалот за да има доволно вода за супата?

Замисли дека си дизајнер на нови практични садови за секојдневна употреба, како што се шишиња, бокали или садови за готвење. Како би ги користел своите знаења за мерење и пресметка на зафатнина за да ги направиш садовите што попрецизни, функционални и ефикасни за корисниците?

Дали би избрал/а аналогни или дигитални мерни инструменти за проверка на нивниот капацитет?

Зошто?

Одговори ги прашањата во твојата тетратка. Сподели ги со свој/и соученик/ци.

1. Колку сум сигурен/а во читањето скали на аналогни и на дигитални инструменти за мерење зафатнина?
 - а) Многу сигурен/а
 - б) Делумно сигурен/а
 - в) Треба да вежбаам повеќе
2. Дали можам прецизно да ги претворам мерните единици за зафатнина (на пр., литри во милилитри, кубни сантиметри во литри)?
 - а) Секогаш прецизно
 - б) Понекогаш правам грешки
 - в) Треба да го повторам ова
3. Кога користам аналоген или дигитален инструмент, дали можам да проценам дали резултатот е логичен?
 - а) Да, секогаш сум сигурен/а
 - б) Понекогаш сум несигурен/а
 - в) Не, ова треба да го подобрам
4. Што можам да направам за да ги подобрам своите вештини за мерење и пресметка на зафатнина? (Напиши еден чекор што ќе го преземеш.)

Самостојна работа

1. Еден резервоар содржи 3,25 kl вода. Претвори ја зафатнината во hl, dal и l.
2. Резервоар со капацитет од 1,8 kl е наполнет до 75 % од својот капацитет. Колкава е моменталната количина на вода во dl и l?
3. Два базени имаат зафатнина од 2,35 kl и 1,75 kl, соодветно.
 - а) Колкава е вкупната зафатнина во hl?
 - б) Колкава е разликата во зафатнината изразена во dal?
4. Која е поголема зафатнина: 4,5 hl или 450 dal? Колку пати едната зафатнина е поголема од другата?
5. Една цистерна собира 12 dal нафта. Колку литри собира еден канистер, ако од целата цистерна можат да се наполнат 24 еднакви канистери?
6. Прочети колкава зафатнина има една кофа со вода и запиши го одговорот во dal. Провери ја точноста со мерење и изрази ја зафатнината во хектолитри (hl).
7. На дигитална скала е прикажана зафатнина од 0,435 kl.
 - а) Претвори ја во hl, dal и l.
 - б) Запиши ја како повеќеимен број.
8. Еден аквариум содржи 2,7 hl вода. Колку l вода содржи аквариумот?
9. Еден производствен процес користи 15 dal течност дневно. Колку hl течност ќе бидат потрошени за 30 дена?
10. Едно транспортно возило може да носи 6 hl течност за едно патување. Колку kl течност може да пренесе за 5 патувања?
11. Едно буре со капацитет од 2,5 dal е наполнето до 80 %. Колкава е количината на течност во бурето во l?
12. Резервоар со капацитет од 1,2 kl се празни во садови од по 12 l. Колку садови ќе бидат потребни за да се испразни целиот резервоар?
13. Еден склад има 8 резервоари, секој со капацитет од 3,75 hl. Колкава е вкупната зафатнина на сите резервоари во dal?
14. Колкава е разликата во зафатнина помеѓу 5 kl и 450 dal? Изрази ја разликата во hl.
15. Еден сад за складирање има зафатнина од 0,625 hl.
 - а) Колку dal и l изнесува оваа зафатнина?
 - б) Направи процена дали е доволен за складирање 700 l.

Време. 12-часовен и 24-часовен систем

Со оваа лекција ќе се потсетиш на знаењата што ги стекна во претходното одделение за мерните единици за време, како што се: секунда, минута, час, ден, недела, месец, година, деценија и век. Притоа ќе научиш да ги користиш врските меѓу мерните единици за време за претворање едни во други, како и 12-часовен и 24-часовен систем при решавање проблеми од секојдневен контекст. Овие два временски система се најчесто користени во различни контексти: 12-часовниот систем се користи за секојдневна употреба, додека 24-часовниот систем е често користен во официјални документи, транспорт и компјутерски системи.

Пример 1

Семејството Јовановиќ планира еднодневно патување. Тие сакаат да посетат зоолошка градина и музеј, а потоа да имаат ручек во ресторан. Во табелата е даден со распоредот и времетраењето на нивните активности:

Активност	Почетно време	Крајно време
Посета на зоолошка градина		
Посета на музеј		
Ручек во ресторан		

- Пресметај го вкупното време кое семејството Јовановиќ го поминува на следниве активности:
 - Посета на зоолошката градина
 - Посета на музејот
 - Ручек во ресторанот
 Резултатите изрази ги во минути.
- Ана, најмалата членка на семејството, ги запишала времињата од табелата со дигитален запис. Како ќе бидат запишани истите времиња со аналоген запис? Накратко опиши ги разликите помеѓу читањето на дигитален и на аналоген часовник.
- Семејството решило да продолжи со активностите уште 2 часа и 45 минути по ручекот. Колку е тогаш часот?

Решение:

а) За посета на зоолошката градина од 10 часот и 30 минути до 12 часот има 1 час и 30 минути или 90 минути.

За посета на музејот, семејството Јовановиќ поминало од 12 часот и 30 минути до 14 часот, односно 1 час и 30 минути или 90 минути.

За ручек во ресторан, одделиле време од 14 часот и 30 минути до 15 часот и 30, односно 1 час или 60 минути.

б)

Активност	Почетно време	Крајно време
Посета на зоолошка градина		
Посета на музеј		
Ручек во ресторан		

в) Последната активност на семејството Јовановиќ е до 15 часот и 30 минути. Семејството продолжило уште 2 часа и 45 минути. $(15 + 2) \text{ h} + (30 + 45) \text{ min} = 17 \text{ h} + 75 \text{ min} = 18 \text{ h } 15 \text{ min}$. Тогаш е 18 часот и 15 минути.



Дополнителен предизвик: Колку децении има во 200 години?

Задача 1

Учениците од еден спортски клуб се подготвуваат за спортски натпревар. Нивниот тренер им подготвил распоред за тренинг и активности за еден ден. Во табелата е прикажан распоредот:

Активност	Почетно време	Крајно време
Утринско загревање	07:45	08:30
Тренинг на терен	09:00	10:15
Одмор	10:15	10:45
Попладневен тренинг	14:00	15:30

- а) Од каков часовник е прикажано времето во табелата?
- б) Пресметај го времетраењето на секоја активност изразено во:
 - Минути
 - Часови (во децимален облик, на пример: 1,5 часа)
- в) Колку време учениците поминуваат во активен тренинг во текот на денот? Одговори во часови и минути.
- г) Најди го вкупното време на сите активности (вклучувајќи го и одморот) изразено во часови и минути.
- д) Ако тренингот на теренот трае 20 % подолго од првично планираното време, колку ќе биде новото крајно време на оваа активност?

Дополнителен предизвик:

Колку години има во 2,3 века?

Задача 2

Марко направил план за неговите обврски во текот на една недела. Тој внимателно го пресметал времето што го троши на различни активности секој ден. Еве ги податоците за неговите дневни активности:

Активности	Времетраење (во мин.)
Учење	120
Спортски тренинг	90
Играње со другари	45
Читање книги	30
Гледање телевизија	60

Марко ги извршува истите активности секој ден од понеделник до петок, додека за викендот не ги прави овие активности.

- а) Пресметај колку време Марко троши на учење, спортски тренинг, играње со другари, читање книги и гледање телевизија за пет работни дена заедно. Изрази го времето во:
 - 1) Минути
 - 2) Часови
- б) Пресметај колку време Марко поминува на учење за:
 - 1) 1 месец (4 недели)
 - 2) 1 година (користи календар од тековната година).
- в) Претвори го вкупното време што Марко го троши на спортски тренинг за пет работни дена од минути во часови.
- г) Ако Марко реши да додаде уште 15 минути за читање книги секој ден, колку време (во часови и минути) ќе троши неделно на оваа активност?

Дополнителен предизвик:

Марко планира да учи 40 % од своето време во текот на викендот за да ги надополни своите обврски. Ако викендот трае 48 часа, колку време (во часови и минути) ќе потроши за учење?

Задача 3

- Треба да направиш експеримент кој трае 2 часа и 45 минути. Колку секунди трае експериментот?
- Ако патуваш на одмор и тој одмор трае 5 дена и 6 часа, тогаш колку ќе биде времето на одмор во часови?
- Ако на твојот мобилен телефон си зборувал вкупно 120 минути во текот на неделата, колку часови ќе биде тоа?

Пример 2

Распоред за училишни активности

Томислав и Ана се ученици во истото училиште. Нивниот училиштен распоред е следниот:

- Часот по математика започнува во 8 часот и 30 минути и трае 45 минути.
 - Потоа следува пауза од 15 минути.
 - Следува часот по физика од 9 часот и 30 минути до 10 часот и 15 минути.
 - Ручекот започнува во 12:00 и трае 45 минути.
 - Последниот час започнува во 15:00 и трае 1 час.
- Запиши го во 12-часовен систем времето кога започнува часот по математика и времето кога започнува последниот час.
 - Запиши го времето за сите активности во 24-часовен систем (почеток на часовите по математика, пауза, часови по физика, ручек, последен час).
 - Ако Томислав и Ана треба да се вратат дома по последниот час и автобусот поаѓа во 16:00 часот, во кој систем е појасно да го прикажат тоа време и зошто?

Решение:

- Часот по математика започнува во 08:30 наутро.

Последниот час започнува во 3 часот попладне.

Во 12-часовен систем времето е поделено на два периода:

- од полноќ до пладне (0:00 до 11:59) и
- од пладне до полноќ (12:00 до 11:59).

Времето го запишуваме со две точки помеѓу часовите и минутите и: за периодот од полноќ до пладне, до времето ги пишуваме или ги кажуваме зборовите „наутро“ или „претпладне“, додека за периодот од пладне до полноќ, до времето ги пишуваме или ги кажуваме зборовите „попладне“ или „навечер“.

Во 24-часовен систем, времето е во еден период, од 00:00 часот до 23:59 часот. Времето се запишува со четири цифри, така што часовите и минутите се разделени со две точки (:), односно пишуваме 00:00, 01:00, 02:00, ... 11:00, 12:00, 13:00, ... 17:00, 18:00, ... 22:00, 23:00. Истражи какви записи за времето се користат во различни земји.

б) Математика од 08:30 до 09:15, пауза од 09:15 до 09:30, физика од 09:30 до 10:15, ручек од 12:00 до 12:45, последниот час од 15:00 до 16:00.

в) Автобусот поаѓа во 16:00 часот. Во 12-часовен систем ова време ќе биде 4:00 попладне. Во 24-часовниот систем тоа е 16:00.

Може да се заклучи дека:

- Аналогните часовници го прикажуваат времето во 12-часовен систем.
- Дигиталните часовници можат да го прикажуваат времето во 12-часовен систем и тогаш го прикажуваат времето, така што часовите и минутите се разделени со две точки (:) и кратенките AM (ante meridiem, за периодот од 0:00 до 11:59 часот), PM (post meridiem, за периодот од 12:00 до 11:59).

24-часовен систем и тогаш го прикажуваат времето со четири цифри, така што часовите и минутите се разделени со две точки (:)



Задача 4

Запиши ги во твојата тетратка овие времиња од 12-часовен во 24-часовен систем:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| а) 5:30 наутро | б) 11:20 претпладне |
| в) 4 часот и 35 минути попладне | г) 9 часот и 50 минути навечер |

Задача 5

Запиши ги во твојата тетратка овие времиња од 24-часовен во 12-часовен систем:

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| а) 13:45 | б) 00:30 | в) 17:00 | г) 23:15 |
|----------|----------|----------|----------|

Пример 3

Марко планира патување од Скопје до Охрид. Тој мора да знае кога тргнува автобусот и кога ќе пристигне во Охрид.

Автобусот тргнува од Скопје во 11:30.

Автобусот пристигнува во Охрид во 2:15 попладне.

- Во 12-часовен систем, кое ќе биде времето на тргнување на автобусот?
- Во 24-часовен систем, кога ќе пристигне автобусот во Охрид?
- Колку време ќе трае патувањето?



Решение:

- а) Во 12-часовен систем времето кога тргнува автобусот е 11:30 претпладне.
- б) Во 24-часовен систем времето кога автобусот пристигнува во Охрид е 14:15.
- в) Патувањето започнува во 11:30 претпладне, значи 30 минути во првата половина на денот и завршува во 2:15 попладне, значи уште 2 часа и 15 минути во втората половина на денот. Вкупно патувањето трае: $2\text{ h } 15\text{ min} + 30\text{ min} = 2\text{ h } 45\text{ min}$. Како ти е полесно да пресметуваш, во 12-часовен или во 24-часовен систем?

Задача 6

Училишната екскурзија ќе се одржи на 12 мај. Погледни го распоредот за денот:

- Автобусот треба да тргне од училиштето во 8:00 претпладне.
 - Научната посета ќе започне во 9:30 наутро, а ќе заврши во 1:45 попладне.
 - Ручекот ќе започне во 14:00 и ќе трае 45 минути.
 - Во 3:00 попладне започнува последната активност и ќе трае до 17:00.
 - Автобусот тргнува за назад во 6:15 попладне.
- а) Претвори го времето на тргнување на автобусот од 12-часовен систем во 24-часовен систем.
 - б) Колку време трае научната посета?
 - в) Пресметај колку слободно време ќе имаш по ручекот до почнувањето на последната активност?

Размисли за ситуација кога работиш во тим и сите користат различни временски системи. Како ќе го координираш времето за да нема забуни? Напиши план како ќе ги синхронизираш временските системи во работната средина.

Напиши краток есеј за тоа како различните временски системи може да бидат од корист во секојдневниот живот.

Самостојна работа

1. Семејството Петровски планира еднодневно патување за викендот. Тие планираат да ги посетат следниве локации:

Локација	Растојание (во km)	Поминато време за патување до локацијата (во минути)	Време за престој (во минути)
Етносело	50	60	90
Национален парк	30	40	120
Локален ресторан	20	30	60

Тие ќе тргнат од дома точно во 9:00 часот наутро.

- Пресметај колку време ќе помине семејството во патување до сите локации. Изрази го времето во часови и минути.
- Колку вкупно време ќе поминат во патување и престој за секоја локација?
- Ако семејството реши да го намали времето за престој во националниот парк за 30 минути, колку време ќе му остане за дополнителни активности?
- Изрази го времето за патување помеѓу сите локации (вклучувајќи го и враќањето дома) во секунди.
- Колкаво растојание во километри поминале тој ден?
- Напиши други прашања кои може да ги одговориш со користење на табелата.

Дополнителен предизвик:

Семејството Петровски планира повторно да го посети етноселото по една година. Ако следната година е престапна година, колку денови ќе поминат од денот на ова патување до нивното следно?

2. Ана организира роденденска забава и сака сè да биде подготвено навреме. Таа направила распоред за подготовките и за активностите за време на забавата. Во табелата подолу се дадени нејзините планови:

Активност	Почетно време	Времетраење
Декорирање на просторот	14:30	1 час и 15 минути
Подготовка на храна	15:45	2 часа и 20 минути
Роденденска забава	18:15	3 часа
Чистење по забавата	21:30	1 час и 45 минути



- а) Пресметај го крајното време на секоја активност. Резултатите запиши ги во дигитален 12-часовен формат (часови: минути).
- б) Колку време Ана ќе помине во подготовка пред почетокот на забавата? Изрази го времето во минути.
- в) Ако Ана сака да започне со подготовките точно 5 часа пред забавата, во колку часот треба да започне?
- г) Запиши ги времињата од табелата на аналоген часовник. Опиши како изгледаат стрелките за почетокот и за крајот на секоја активност.
- д) Колку вкупно време (во часови и минути) е потребно за сите активности заедно?
- е) Ана одлучила да скрати 30 минути од подготовката на храната. Колку време сега ќе има за одмор пред да започне забавата?

Дополнителен предизвик:

Ако Ана планира да го прослави својот роденден и следната година, пресметај колку недели има до нејзиниот следен роденден.

Прочитај ја внимателно секоја задача и реши ја. Запиши ги чекорите што ќе ги направиш за да добиеш точен одговор.

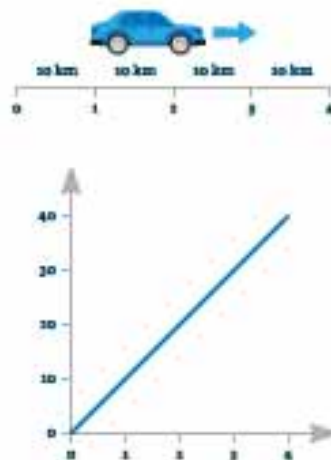
3. Претвори 150 минути во часови и минути.
4. Претвори 48 часа во денови.
5. Колку недели има во 15 дена?
6. Претвори 6 недели во месеци (претпостави дека има 4 недели во месец).
7. Колку години има во 3 децении?
8. Претвори 500 секунди во минути и секунди.
9. Колку недели има во 10080 минути?
10. Колку секунди има во 3 часа?
11. Претвори 730 дена во години.
12. Кое е поголемо: 3 часа и 30 минути или 210 минути? Објасни.
13. Вера планира да работи на проект од 11:00 претпладне до 5:30 попладне. Претвори го времето во 24-часовен систем и пресметај колку време ќе помине на проектот.

14. Васил и неговото семејство патуваат од Белград, Србија, до Њујорк, САД. Летот е од Белград во 10 часот претпладне часот по локално време. Летот трае 10 часа и пристигнува во Њујорк во 15:00 часот по локално време.
- Запиши го времето во 12-часовен систем кога ќе пристигнат во Њујорк.
 - Пресметај ја разликата во временските зони помеѓу Белград и Њујорк.
15. Твојот училиштен автобус пристигнува на станицата во 10 часот претпладне. Ако автобусот потоа се враќа на истата станица за 3 часа и 20 минути, кога ќе пристигне назад? Запиши го времето на пристигнување во 12-часовен и во 24-часовен формат.
- 16*. Јана учествува на меѓународен состанок кој ќе се одржи помеѓу три града: Токио (Јапонија), Лондон (Обединето Кралство) и Сиднеј (Австралија). На состанокот присуствуваат учесници од овие три града. Состанокот ќе започне во 09:00 часот во Токио на 1 март. Истражи на интернет за временските зони (Токио, Лондон, Сиднеј).
- Претвори го времето на почетокот на состанокот во време за Лондон и Сиднеј.
 - Колку е временската разлика помеѓу Токио и Сиднеј?

Пресметување временски интервали и работа со графици

Во оваа лекција ќе се потсетиш како да пресметуваш временски интервали користејќи различни графици и распоред, од секојдневни до посложени примери. Временските интервали се од суштинско значење за организирање на времето, особено кога работиш со распоред за настани, планови, транспорт и други активности.

Во оваа лекција ќе научиш како да ги користиш временските графици и како да пресметаш временски интервали, што е важен дел од планирањето и организирањето на секојдневниот живот.



Пример 1

Тим од ученици планира училишна екскурзија која ќе трае 4 дена. Секој ден има различен распоред на активности, како што е дадено во табелата:

Активности по денови:

Денови	Активности и време за одмор		
	Почеток на активностите	Одмор	Крај на активностите
Прв	09:00	12:00 - 12:30	16:30
Втор	08:30	13:00 - 13:30	17:00
Трет	09:00	12:00 - 12:30	15:30
Четврти	08:00	11:00 - 11:30	14:00

- Колку вкупно време траат активностите и времето за одмор во текот на екскурзијата? Пресметај го времето во часови и минути.
- Користи распоред за 24 часа и пресметај колку часа активности (без времето за одмор) ќе има секој ден.
- Ако распоредот за екскурзијата започнува на 15 мај, кога ќе заврши екскурзијата според календарот?

Решение:

- Прв ден: 7 часа и 30 минути. Втор ден: 8 часа и 30 минути. Трет ден: 6 часа и 30 минути. Четврти ден: 6 часа. Вкупно: 27 часа и 90 минути = 28 часа и 30 минути.
- Прв ден: 7 часа. Втор ден: 8 часа. Трет ден: 6 часа. Четврти ден: 5,5 часа.
- Почеток на 15 мај, крај на 18 мај.

Задача 1

Задолжен си да направиш настан за викенд. Дневниот распоред на настанот изгледа вака:

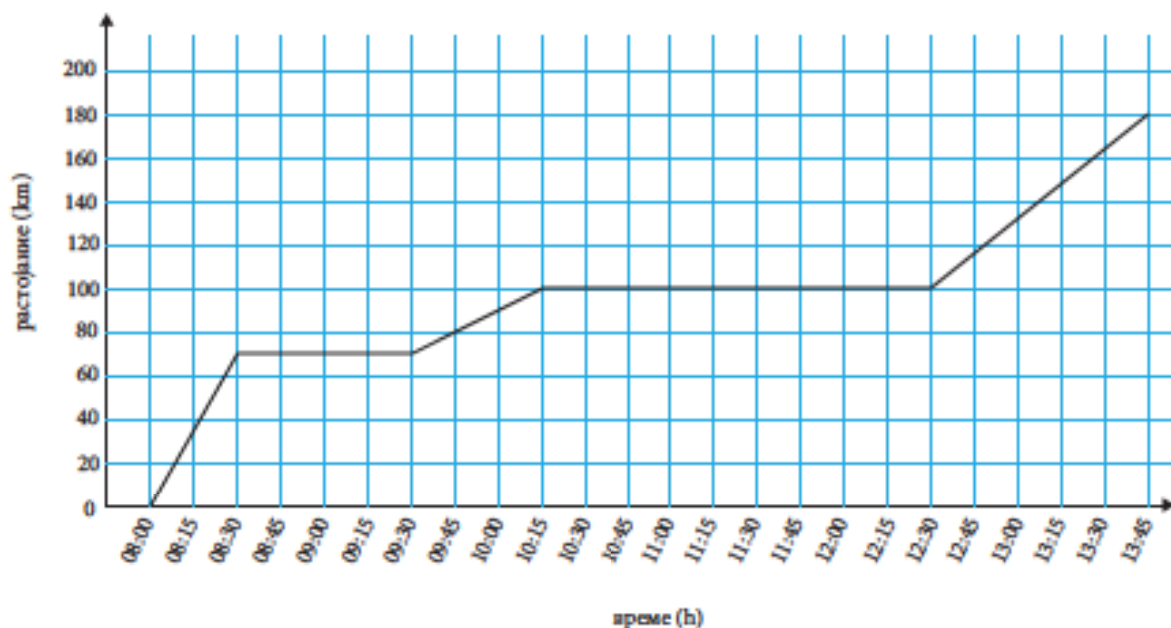
- Почеток на настанот: 09:00
 - Прва пауза: 10:30 – 11:00
 - Втора пауза: 13:00 – 14:15
 - Завршеток на настанот: 16:00
- Колку време ќе трае настанот без пауза?
 - Колку време е планирано за пауза?
 - Пресметај го временскиот интервал меѓу почетокот и крајот на настанот. Запиши го времетраењето во минути.

Пример 2

Игор патува од Скопје до Битола со попатни паузи. Користи го графикот за да ја пополниш табелата со распоредот на неговите активности во текот на патувањето, а потоа да пресметаш.

Поминато растојание по часови:

Патувањето на Игор



а) Прецртај ја табелата во твојата тетратка.

Активност	Време во 24-часовен запис
Прв дел од патувањето	
Прво застанување за краток одмор	
Втор дел од патувањето	
Второ застанување за ручек	
Трет дел од патувањето	

- Во колку часот Игор ја направил првата пауза и колку време траела?
- Колку време се задржал на ручек?
- Колку вкупно време и колку километри поминал патувајќи од Скопје до Битола?
- Колку километри поминал Игор пред да застане за ручек?
- Ако Игор не застанувал воопшто, колку време ќе траело патувањето?

Решение:

а) Табела - Време на активности во 24-часовен запис

Активност	Време во 24-часовен запис
Прв дел од патувањето	08:00-08:30
Прво застанување за краток одмор	08:30-09:30
Втор дел од патувањето	09:30-10:15
Второ застанување за ручек	10:15-12:30
Трет дел од патувањето	12:30-13:45

- б) Првата пауза Игор ја направил во 08:30 часот и таа траела до 09:30, односно 1 h ($9\text{ h } 30\text{ min} - 8\text{ h } 30\text{ min} = 1\text{ h}$).
- в) Ручекот започнал во 10:15 часот, а завршил во 12:30 часот. Значи, траел $12\text{ h } 30\text{ min} - 10\text{ h } 15\text{ min} = 2\text{ h } 15\text{ min}$.
- г) За да го пресметаме вкупното поминато време за патување, можеме да прочитае од графикот (или табелата) кое е крајното време на пристигнување и времето на тргнување, а потоа ја пресметуваме разликата, односно $13\text{ h } 45\text{ min} - 8\text{ h} = 5\text{ h } 45\text{ min}$. Од графикот читаме која е крајната вредност за километрите на крајот од патувањето во 13:45 часот, при што километрите ги читаме на у-оската. Така заклучуваме дека Игор поминал 180 километри.
- д) Од графикот читаме дека во 10:15 часот пред да застане на ручек, Игор имал поминато 100 километри.
- е) Ако Игор воопшто не застанувал, времето на патување може да се пресмета на 2 начини, и тоа: или да ги собереме сите временски интервали на движење или од вкупното време на патување да ги извадиме двата временски интервали кога Игор застанал на пауза и на ручек. Овде ќе пресметаме на вториот начин:
 $5\text{ h } 45\text{ min} - (1\text{ h} + 2\text{ h } 15\text{ min}) = 5\text{ h } 45\text{ min} - 3\text{ h } 15\text{ min} = 2\text{ h } 30\text{ min}$.

Задача 2

Претстави ја со график промената на телесната температура што ја имал Енес во текот на еден ден додека имал настинка. Од графикот определи:

- а) Колку време имал температура над 38°C ?
- б) Во колку часот температурата му се намалила на 36°C ?
- в) Која телесна температура ја имал најдолго во текот на денот?
- г) Во 14:30 зел таблета против висока температура. Колку минути поминале додека температурата паднала на $37,5^\circ\text{C}$ степени?

Температура по часови:

Време (h)	Температура ($^\circ\text{C}$)
7:00	37
9:30	38
14:15	39
18:00	38
21:00	37,5
21:30	37
22:30	36

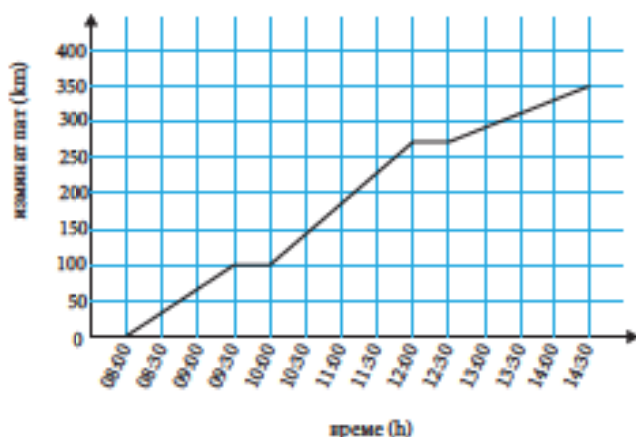
Пример 3

Планирање патување. Ти и твоето семејство планирате да патувате од твојот град до планинско одморалиште за викенд. Планот е патувањето да се одвива на следниот начин: претпладне да биде со автомобил, а попладне со автобус. Притоа сакате да направите една пауза во делот на патувањето со автомобилот и да не го пропуштите автобусот. За да ја направите процената на времето на патувањето, користете ги распоредот на активностите и графикот:

- Колку време вкупно ќе трае патувањето од твојот град до планинското одморалиште?
- Колку време поминува помеѓу пристигнувањето на автобуската станица и почетокот на автобускиот превоз?
- Како би патувале ако сакате да пристигнете на одморалиштето порано? Кој дел од патувањето би го скратиле?
- Пресметај колку е вкупното време на возење од почетокот на патувањето до пристигнување во одморалиштето.
- Колку минути подоцна ќе започне патувањето ако наместо во 08:00 часот, автомобилот тргне во 8:45 часот? Доколку нема попатни паузи, дали ќе стигне навреме на автобуската станица пред тргнувањето на автобусот?

Потребно време за поминување на патот

Планирање на патување



Решение:

- Вкупно време на патување е: $14\text{ h } 30\text{ min} - 8\text{ h} = 6\text{ h } 30\text{ min}$.
- Време помеѓу пристигнувањето на автобуската станица и почетокот на автобускиот превоз: $12\text{ h } 30\text{ min} - 12\text{ h} = 30\text{ min}$.
- Ако сакаш да пристигнете порано, може да се скрати времето за паузи и да се замени вториот дел од патувањето - наместо со автобус, да биде со автомобил. Од графикот е очигледно дека патувањето со автомобил е побрзо - за исти или помали временски интервали со автомобилот се поминуваат поголеми растојанија отколку со автобусот. На пример: со автобусот за 2 h се поминати 80 km, додека со автомобилот во првиот дел 100 km за 1 h 30 min, а по паузата 170 km за 2 h.
- Вкупно време на возење е вкупното време на патување без паузи и чекањето на автобусот, односно: $6\text{ h } 30\text{ min} - (30\text{ min} + 30\text{ min}) = 6\text{ h } 30\text{ min} - 1\text{ h} = 5\text{ h } 30\text{ min}$.
- Патувањето ќе почне 45 минути подоцна, односно во 08:45. Ако при патување со автомобил нема попатна пауза (застанување), тогаш ќе можеш да стигнеш со твоето семејство пред тргнувањето на автобусот.

Задача 3

Даден е возниот ред за возови од Скопје до Велес. Претстави го патувањето со график.

- а) Колку време патува возот од Лисиче до Велес?
- б) Колку време му е потребно на возот да стигне од Скопје до Велес?
- в) Меѓу кои две станици патот најдолго трае и колку?
- г) Меѓу кои две станици се стигнува за најкраток временски интервал?
- д) Дали има станици меѓу кои патувањето трае исто време?
- е) Колку километри е растојанието од Драчево до Велес?

Табела - Поминато време и растојание од едно до друго место

Место	Време	Поминато растојание (km)
Скопје	06:20	0
Лисиче	06:31	5
Драчево	06:37	13
Орешани	06:48	25
Велес	07:25	55

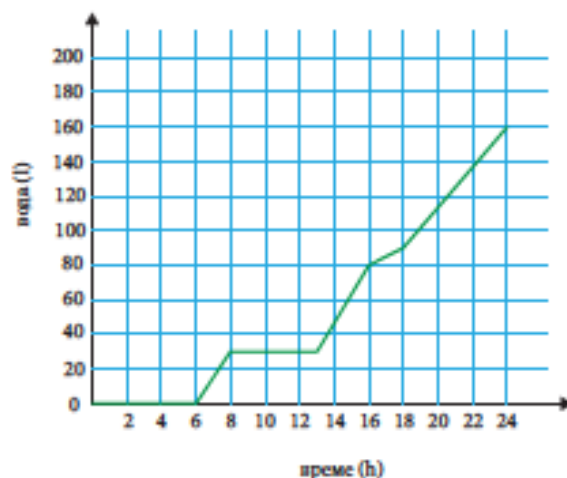
Задача 4

Со графикот е дадена потрошувачката на вода на семејството Петровски во текот на еден ден.

- а) Колку вкупно литри се потрошени во текот на цел ден?
- б) Во кои временски интервали е потрошено вода повеќе од 30 литри? Колку вкупно часови е тоа?
- в) Во кој период од денот се троши најмногу вода?
- г) Колку часа во текот на денот има потрошувачка помала од 30 литри?
- д) Пресметај колкава би била потрошувачката на вода за еден месец доколку дадените податоци би важеле за секој ден од месецот.
- е) Ако 1000 литри вода чинат 40 денари, колкава би била месечната сметка на ова семејство?
- ж) Кои активности би предизвикале поголема потрошувачка на вода во различни делови од денот?
- з) Разгледај ја сметката за вода на твоето семејство и размисли како може да штедиме вода, а со тоа и пари што ги плаќаме за вода?

Потрошувачка на вода во временски периоди

Потрошена вода на семејство Петровски



Размисли за важноста на точното пресметување временски интервали. Во која ситуација од твојот живот сметаш дека точното пресметување на временските интервали е најважно? Напиши конкретен пример од твоето секојдневие каде што претходно наученото знаење ќе ти помогне да организираш некои активности.

Запиши ги во твојата тетратка одговорите на следните прашања. Оценувај се од 1 до 4, каде што:

- 1 – Не можам да го решам проблемот.
 - 2 – Можам да решам некои задачи, но имам потреба од помош.
 - 3 – Можам самостојно да ги решам задачите и да ги објаснам основните концепти.
 - 4 – Лесно ги решавам задачите, можам да ги објаснам сите чекори и да ги применам во секојдневни ситуации.
-
1. Можам да читам и разбираам распоред и да го применувам за пресметување временски интервали.
 2. Можам точно да пресметам временски интервали помеѓу различни активности користејќи различни единици (секунди, минути, часови, денови, недели).
 3. Успевам да ги разберам и користам графициите за пресметување временски интервали.
 4. Можам да применам распоред и пресметување временски интервали во реални ситуации, како што се организирање работен ден или распоред на активности.

Во зависност од твојата самооцена, размисли кои области може да ги подобриш. Ако си се оценил за некое тврдење со 1 или 2, повторно погледни ги задачите кои се однесуваа на тоа тврдење и побарај дополнителна помош за подобро разбирање.

Самостојна работа

1. Најавен е автобус кој треба да тргне од твојот град во 10:25 и да пристигне во соседниот град во 14:00. Колку време ќе трае патувањето? Пресметај го временскиот интервал и запиши го во часови и минути.

2. Распоредот на часовите во еден твој училиштен ден изгледа вака:
 - а) Колку време траат само часовите не сметајќи ги паузите?
 - б) Колку време, во часови и минути, ќе поминеш во училиште од почеток до крај на последниот час?

Распоред на часови

Час	Време на почеток и крај на часот
1	08:00-08:45
2	09:00-09:45
3	10:00-10:45
4	11:00-11:45
5	12:00-12:45
6	13:00-13:45

3. Планирај распоред за 5 различни активности во текот на денот (на пример: истражување, пишување, пауза, корекција, завршување). Пресметај колку вкупно време ќе ти треба за да ги завршиш сите активности.

4. Ана планира патување:
 - Ќе тргне на 10 март и ќе остане на патување 12 дена.
 - Потоа ќе биде дома 5 дена пред да замине повторно на патување кое ќе трае 8 дена.

- а) На кој датум Ана ќе се врати од првото патување?
- б) Кога ќе заврши второто патување?

5. Во училиштето има зимски распуст кој трае 3 недели. Почнува на 20 декември. Учениците се враќаат на училиште првиот понеделник по распустот.

- а) На кој датум завршува распустот?
- б) Кој е датумот на првиот училиштен ден?

6. Екипата за снимање филм има распоред на активностите дадени во следната табела:

Потребно време за снимање сцени

Снимање на сцена 1	08:30-10:15
Одмор	10:15-10:45
Снимање на сцена 2	10:45-12:00
Ручек	12:00-13:00
Снимање на сцена 3	13:00-15:30

- а) Колку време вкупно траат сите снимања?
- б) Колку време вкупно имаат за одмор и ручек?

7. Ивана работи на проект кој трае 90 дена и почнува на 1 февруари. Проектот е поделен на 3 еднакви фази.
- Колку дена трае секоја фаза?
 - На кој датум завршува секоја од фазите?
 - Кога ќе заврши целиот проект?
- Направи пресметувања за непрестапна и престапна година.
8. Распоред за возови:
- Воз 1: Тргува од Скопје во 08:20 и пристигнува во Велес во 09:05.
 - Воз 2: Тргува од Велес во 09:20 и пристигнува во Гевгелија во 11:15.
- Колку време патува воз 1 од Скопје до Велес?
 - Колку време чека патникот на станицата во Велес за да го фати воз 2, ако пред тоа се возел во воз 1?
 - Колку време вкупно му треба на патникот од Скопје до Гевгелија, вклучувајќи го времето на чекање?

Периметар на триаголник и на четириаголник

Во секојдневниот живот често се среќаваш со прашањето за определување периметар на форми како што се триаголници, четириаголници или други многуаголници. Периметарот ја претставува вкупната должина на сите страни на една форма. Во оваа лекција ќе се потсетиш на основните поими и ќе научиш како да пресметуваш периметар на триаголници и четириаголници во различни ситуации.



Пример 1

Помагаш во уредување цветна градина со неправилна форма, која има 6 страни. Одлучено е да се постави ниска дрвена ограда околу градината за да се заштитат цвеќињата. Должините на страните на градината се: 2 m, 3 m, 4 m, 3 m, 5 m и 4 m.

- а) Оградата се продава во пакувања од 10 m. Колку пакувања ограда ќе треба да купиш?
- б) Ако едно пакување чини 500 денари, колку пари ќе потрошиш?
- в) Ако треба да ја уредиш градината така што страните да бидат еднакви (на пр., правилен шестаголник), која ќе биде должината на секоја страна ако периметарот остане ист?

Решение:

- а) За да ја одредиш вкупната должина на оградата што треба да ја поставиш, треба да ги собереш должините на сите страни: $2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 4 = 21$ m. Ако оградата се продава во пакување од 10 m, тогаш ќе треба да се купат $21 \text{ m} : 10 \text{ m} = 2$ пакувања и не стасува уште за 1 m. Значи ќе треба да се купат 3 пакувања.
- б) Ако едно пакување чини 500 денари, тогаш три пакувања ќе чинат 1500 денари.
- в) Ако многуаголникот е правилен шестаголник, тогаш неговите страни се со еднаква должина која можеме да ја означиме со a и периметарот може да се пресмета $L = 6 \cdot a$. Според условот на задачата, периметарот на правилниот многуаголник е еднаков со периметарот на шестаголникот од а), па имаме $21 \text{ m} = 6 \cdot a$, $a = 21 \text{ m} : 6 = 3,5 \text{ m}$.

Задача 1

Замисли дека организираш натпревар на тркачка патека. Патеката има неправилна форма со 6 страни, а должините на страните се: 10 m, 15 m, 12 m, 20 m, 18 m и 25 m.

- а) Колкава е вкупната должина на патеката што ќе треба да ја истрчаат тркачите?
- б) Ако натпреварот се состои од 5 пати поминување на патеката, колкава ќе биде вкупната должина што ќе ја помине секој од тркачите?
- в) За да ја обележиш патеката со лента, купуваш пакувања од 50 m лента. Колку пакувања лента ќе бидат потребни за целата патека?
- г) Ако треба да додадеш уште една страна за да ја направиш патеката со 7 страни, колкава би била должината на таа страна ако сакаш вкупниот периметар да биде точно 110 m?

Пример 2

Ајше организира излет во паркот и сака да постави декоративна лента околу просторот каде што ќе седи со нејзините другарки. Просторот за излет има правоаголна форма со страни долги 6 m и 4 m. Покрај тоа, одлучила да постави и помал триаголен простор за играње чии страни се 3 m, 4 m и 5 m. Колку декоративна лента ѝ треба на Ајше?

Решение:

За да се пресмета колку декоративна лента ѝ треба на Ајше за правоаголниот простор за седење, се пресметува периметарот на правоаголникот:

Периметарот на правоаголникот $= 2 \cdot \text{должина} + 2 \cdot \text{ширина}$ или периметарот на правоаголникот $= 2 \cdot (\text{должина} + \text{ширина})$. Зошто?

Периметарот се означува најчесто со L . Ако должината и ширината на правоаголникот ги означим, на пример, со a и b , тогаш периметарот на правоаголникот може да го запишеме со формулата: $L = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ или $L = 2 \cdot (a + b)$.

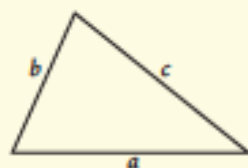
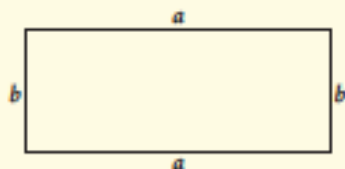
Периметарот на просторот во кој ќе седи Ајше со другарките е: $L = 2 \cdot (6 + 4) = 20 \text{ m}$.

За да се пресмета колку декоративна лента ѝ треба за просторот во форма на разностран триаголник, треба да се соберат сите три страни, односно $L = a + b + c$.

Триаголниот простор има периметар $L = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ m}$.

На крај, за да ја пресметаш вкупната декоративна лента што ѝ треба на Ајше, треба да ги собереш двата периметри, односно $20 \text{ m} + 12 \text{ m} = 32 \text{ m}$.

Ако Ајше има лента долга 30 m , дали ќе ѝ остане од лентата или ќе ѝ недостига?

**Задача 2**

Пресметај го периметарот на триаголник ако неговите страни имаат должини 5 cm , 7 cm и 10 cm .

Задача 3

Пресметај го периметарот на правоаголник со должина на страните 8 cm и ширина 5 cm .

Задача 4

Прецртај ја табелата во тетратката и пополни ги празните полиња!

Триаголник	Формула за периметар на триаголникот

Задача 5

Прецртај ја табелата во твојата тетратка и пополни ја!

Четириаголник	Формула за периметар на четириаголник
правоаголник 	
квадрат 	
ромб 	
паралелограм 	
трапезоид 	
делтоид 	

Задача 6

Нива има форма на рамнокрак трапез. Двете еднакви страни на трапезот се долги 7 m, а основите имаат должина 8 m и 12 m.

- Колку е периметарот на нивата?
- Ако одлучиш да ја намалиш должината на поголемата основа за 2 m, колку ќе биде новиот периметар на нивата?
- Ако одлучиш да ја намалиш должината на секој крак за 1 m, колку ќе биде новиот периметар на нивата?

Пример 3

Ти си дизајнер кој треба да изработи рамки за слики во правоаголна форма со ширина y и должина $2y$. Некои од рамките содржат украсни делови поставени во правоаголната рамка. Украсните делови имаат форма на рамнокрак триаголник со основа 8 cm и крак $x\text{ cm}$.

- Изрази го кракот x на триаголникот преку периметарот и основата.
- Ако знаеш дека периметарот на триаголникот е 28 cm , колкава е должината на кракот x ?
- Периметарот на правоаголникот изрази го како функција од y .
- Ако периметарот на правоаголникот е 60 cm , најди ги должините на страните y и $2y$.

Решение:

- Периметарот на триаголникот е $L = 8 + 2x$. Треба кракот x да се изрази преку основата и периметарот. Имаме $2x = L - 8$, $x = \frac{L-8}{2}$.
- Под а) изрази го кракот x преку периметарот L и основата. Основата е позната, 8 cm . Ако и периметарот е познат, 28 cm со замена во $x = \frac{L-8}{2}$ имаме: $x = \frac{28-8}{2}$, $x = \frac{20}{2}$, $x = 10$.
Кракот на триаголникот е 10 cm .
- Ако должината на правоаголникот е $2y$ и ширината е y , тогаш периметарот на правоаголникот $L = 2y + 2 \cdot (2y) = 2y + 4y = 6y$.
- Ако периметарот на правоаголникот е 60 cm , тогаш со замена во $L = 6y$ имаме $60 = 6y$, $y = \frac{60}{6} = 10$. Должините на страните на правоаголникот ќе бидат 10 cm и 20 cm .

Задача 7

Замисли дека уредуваш градина и околу неа поставуваш патека. Градината е во форма на неправилен четириаголник, каде што една од страните е долга a метри, втората страна е долга $2a$ метри, третата страна е долга b метри, а четвртата страна е долга $b + 3$ метри. Градината со една од страните ја допира мал цвекарник во форма на рамностран триаголник, каде што секоја страна е долга c метри.

- Изрази го периметарот на градината преку a и b .
- Изрази го периметарот на цвекарникот преку c .
- Ако вкупниот периметар на градината е 50 метри и страната a е за 4 метри пократка од b , најди ги вредностите на a и b .
- Ако периметарот на цвекарникот е 18 метри, колкава е должината на страната c ?
- Колкава е вкупната должина на патеката што треба да ја поставиш ако патеката ги обиколува и градината и цвекарникот?

Ако имаш два триаголници со ист периметар, дали тие секогаш ќе имаат еднаква должина на нивните страни? Објасни зошто и наведи пример.

Одговори ги прашањата во твојата тетратка. Потоа сподели ги одговорите со твој/и соученик/ци.

Разгледај ги сите решени задачи од оваа лекција.

1. Која задача ти беше најлесна?
2. Која најтешка?
3. Дали се чувствувааш сигурен/на во пресметувањето на периметарот на триаголник и четириаголник?
4. Што научи и како можеш да ги примениш овие знаења во реалниот живот?
5. Кои знаења сакаш да ги подобриш?

Самостојна работа

1. Паркинг-местото има форма на правоаголник. Должината на едната страна е x метри, а ширината е $2x$ метри. Колкава ќе биде вкупната должина на оградата околу паркинг-местото? (Изрази го периметарот како функција од x .)
2. Во дворот на детската градинка има жардиниера во форма на рамнокрак триаголник. Двете еднакви страни се долги $2y$ метри, а основата е долга $3y$ метри. Изрази го периметарот на жардиниерата како функција од y .
3. Дворот има форма на четириаголник. Едната страна е долга a метри, а спротивната страна е долга $2a$ метри. Другите две страни се b и $b + 4$ метри. Изрази го периметарот на дворот како функција од a и b .
4. Трчачката патека има форма на разностран триаголник со страни x , $x + 4$ метри и $2x$ метри. Изрази го периметарот на патеката како функција од x .
5. Игралиштето е во форма на правоаголник. Должината е y метри, а ширината $y - 5$ метри. Изрази го периметарот на игралиштето како функција од y .
6. Градината има форма на рамнокрак триаголник. Двете еднакви страни се долги z метри, а основата е долга $1,5z$ метри.
 - а) Изрази го периметарот на градината како функција од z .
 - б) Колку е периметарот на градината ако $z = 7\frac{1}{4}$ m?
7. Куќата е опкружена со ограда во форма на четириаголник. Должината на едната страна е x метри, втората страна е $x + 3$ метри, а другите две страни се y и $y + 2$ метри.
 - а) Изрази го периметарот на оградата како функција од x и y .
 - б) Колкава е должината на оградата ако $x = 6$ m и $y = 9$ m?

8. Игралиштето има форма на петаголник. Должините на страните се 2 a метри, 3 a метри, a метар, $a + 2$ метри и 4 a метри.
 - а) Изрази го периметарот на игралиштето како функција од a .
 - б) Пресметај го периметарот на игралиштето ако $a = 22,5$ m.
9. Паралелограм има должина 10 m, а периметарот на паралелограмот е 36 метри. Пресметај ја другата страна на паралелограмот.
10. Паркинг-местото има форма на рамнокрак трапез со основи 15 m и 9 m, а периметарот е 42 метри. Пресметај ја должината на кракот на паркингот.
11. На влезот на парк има декорација во форма на ромб. Пресметај ја должината на страната на ромбот со периметар 32 m.
12. Летало во форма на трапезоид има страни: 18 dm, 12 dm и 11 dm, и периметар 58 dm. Пресметај ја четвртата страна на леталото.
13. Приврзок има форма на делтоид со страна 11 mm и периметар 3,2 cm. Пресметај ја другата страна на приврзокот.
- *14. Еден од аглиите на ромб е 120° , а помалата дијагонала е 8,5 cm. Пресметај го периметарот на ромбот.
- *15. Помалата страна на еден правоаголник е 5 cm, а симетралата на еден негов агол ја дели поголемата страна на две отсечки од кои едната е со должина 4 cm. Пресметај го периметарот на правоаголникот.
- *16. Дијагоналата на квадрат е 12 cm. Низ темињата на квадратот се повлечени прави паралелни со дијагоналите. Одреди ги видот и периметарот на добиениот четириаголник.
- *17. Краците и помалата основа на трапез се по 8 cm. Поголемата основа е $\frac{3}{8}$ од збирот на другите три страни. Одреди го периметарот на трапезот.
- *18. Аголот меѓу две еднакви страни на делтоидот е 60° , а дијагоналата чии крајни точки се темињата на еднаквите агли е 5 cm. Пресметај го периметарот на делтоидот ако една негова страна е 7,5 cm.

Плоштина на сложени 2Д-форми

Во оваа лекција ќе се запознаеш со методите за пресметување плоштина на сложени 2Д-форми составени од квадрати, правоаголници и правоаголни триаголници. Ќе ги разгледуваш деловите на овие форми, ќе користиш формули и ќе научиш како да го поедноставиш процесот на пресметување.

Преку оваа лекција ќе сфатиш колку е важно познавањето на единиците за мерење и нивната примена во секојдневниот живот, на пример, при пресметување плоштина на соба, двор или на друга површина.



Пример 1

Давид сака да постави плочки на подот во својата соба. Собата има правоаголна форма со должина од 4 m и ширина од 3 m. Плочките што ќе ги користи се во форма на квадрат со страна 30 cm.

- а) Колкава е плоштината на собата во квадратни метри (m^2)?
- б) Колкава е плоштината на собата во квадратни сантиметри (cm^2)?
- в) Колку плочки му се потребни за да го покрие целиот под, без да се земе предвид отпадот од сечење?

Решение:

Упатство за в) Бројот на потребни плочки = Плоштина на собата во cm^2 : Плоштина на една плочка во cm^2 , односно $120000 cm^2 : 900 cm^2 = 133,33$ плочки. Потребни се 133 или 134 плочки? На кој цел број треба да се заокружи?

Пример 2

Марија сака да постави дрвена рамка околу цветна градина во форма на правоаголен триаголник. Едната катета на градината е долга 4 m, а другата катета е долга 3 m. Колкава е плоштината на градината во квадратни метри (m^2)?

Решение:

Формулата за плоштина на правоаголен триаголник е:

$$\text{Плоштина} = \frac{\text{катета}_1 \cdot \text{катета}_2}{2}, \text{ односно } P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Со замена на вредностите на катетите во формулата имаме: $P = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 m^2$.

Значи, плоштината на градината е $6 m^2$.

Задача 1

Работно биро во форма на правоаголник има должина од 120 cm и ширина од 60 cm. Пресметај ја плоштината на работното биро.

Задача 2

Квадрат има страна 15 cm.

- Колку е плоштината на квадратот во квадратни дециметри (dm^2).
- Колку е должината на правоаголник кој има плоштина еднаква со плоштината на квадратот и ширина од 9 cm.

Пример 3

Милица купила нов стан со распоред како на сликата. Притоа, подот на спалната соба има форма на квадрат, дневната е во форма на правоаголник, а бањата – правоаголен триаголник. Милица сака да ги поплочи подовите во сите простории на станот. Помогни ѝ да ги направи пресметките.



- Колкава е вкупната плоштина на станот?
- Ако Милица сака да покрие половина од станот со паркет, колкава е плоштината што треба да биде покриена со паркет?

Решение:

- Плоштината на цел стан е збир од плоштините на сите простории, односно на квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник.

Плоштината на спалната, која има форма на квадрат, се пресметува со формулата $P = a^2$, од каде што со замена се добива $P_k = a^2 = 5^2 = 25 \text{ m}^2$.

Плоштината на дневната се пресметува по формулата за плоштина на правоаголник, односно $P_p = a \cdot b = 5 \cdot 6 = 30 \text{ m}^2$.

За плоштината на бањата, од условот на задачата, едната катета е 2 m, а другата катета е еднаква на ширината на правоаголникот, односно 5 m.

Плоштината на правоаголен триаголник $= \frac{\text{катета}_1 \cdot \text{катета}_2}{2}$ односно $P_t = \frac{a \cdot b}{2}$.

Со замена во формулата за катетите, 2 m и 5 m соодветно, за плоштината на правоаголниот триаголник добиваме $P_t = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5 \text{ m}^2$.

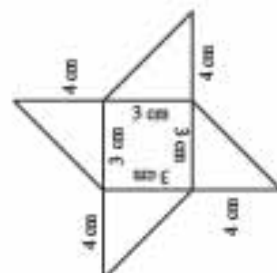
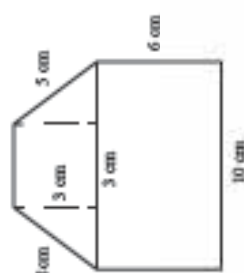
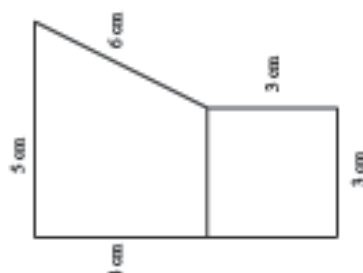
Вкупната плоштина на станот е збир од плоштините на квадратот, правоаголникот и триаголникот:

Вкупна плоштина = Плоштина на спална + Плоштина на дневна + Плоштина на бања, односно $P = P_k + P_p + P_t = 25 \text{ m}^2 + 30 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$.

- Половина од вкупната плоштина е $\frac{1}{2}$ од 60 m^2 , односно 30 m^2 .

Задача 3

Пресметај ја плоштината на секоја сложена 2Д-форма.



Пример 4

Сара сака да направи декоративен панел за сид од три вида дрвени плочи. Панелот е составен од квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник. Димензиите на панелот се следни:

- Квадратот има страна од 51 cm.
 - Правоаголникот има должина од 80 cm, а ширината е две третини од страната на квадратот.
 - Една катета на правоаголниот триаголник е еднаква на ширината на правоаголникот, а другата катета е 40 cm.
- а) Изрази ја ширината на правоаголникот преку страната на квадратот и пресметај ја нејзината вредност.
- б) Колкава е вкупната плоштина на панелот во квадратни сантиметри (cm^2)?
- в) Претвори ја вкупната плоштина на панелот во m^2 .
- г) Ако Сара сака да ги премачка со заштитен лак само квадратот и правоаголникот, колкава е површината што треба да ја лакира во dm^2 ?



Решение:

- а) Пресметка на ширината на правоаголникот преку страната на квадратот:
Според условот на задачата, ширината на правоаголникот е $\frac{2}{3}$ од страната на квадратот, односно $\frac{2}{3} \cdot 51 \text{ cm} = 34 \text{ cm}$.
- б) Пресметка на плоштината на квадратот: $P_k = a^2 = (51 \text{ cm})^2 = 2601 \text{ cm}^2$.
Пресметка на плоштината на правоаголникот: $P_p = 80 \text{ cm} \cdot 34 \text{ cm} = 2720 \text{ cm}^2$.
Пресметка на плоштината на правоаголниот триаголник: $P_t = \frac{34 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}}{2} = 680 \text{ cm}^2$.
Вкупната плоштина на панелот:
 $P = P_k + P_p + P_t = 2601 \text{ cm}^2 + 2720 \text{ cm}^2 + 680 \text{ cm}^2 = 6001 \text{ cm}^2$.
- в) Претворање на вкупната плоштина во m^2 :
Знаеш дека $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$, тогаш $P = 6001 : 10\,000 = 0,6001 \text{ m}^2$.
- г) Плоштината за лакирање е збир од плоштините на квадратот и правоаголникот, односно $P = 2601 \text{ cm}^2 + 2720 \text{ cm}^2 = 5321 \text{ cm}^2 = (5321 : 100) \text{ dm}^2 = 53,21 \text{ dm}^2$.

Задача 4

На автопат треба да се постави сообраќаен патен знак од правоаголна метална плоча со димензии 2 m и 1,2 m. На плочата треба да се исече отвор во форма на правоаголен триаголник со катети 1,2 m и 0,8 m. Колкава е плоштината на металот што останува, изразена во cm^2 ?

Две различни сложени 2Д-форми составени од квадрати, правоаголници и правоаголни триаголници имаат иста плоштина. Дали тоа значи дека тие форми мора да имаат ист периметар? Објасни го твојот одговор со пример.

Обиди се да ги оцениш твоите вештини во пресметувањето плоштина на сложени 2Д-форми. Кои се твоите силни страни, а во што треба да се подобриш?

Самостојна работа

1. Во еден склад треба да се складираат картонски кутии, при што основата на секоја кутија има димензии 50 cm и 30 cm. Складот има подна плоштина од 24 m^2 . Колку кутии можат да се постават на подот?
2. Треба да се бојадисаат ѕидови во две простории од кои едната има правоаголен ѕид со страни 6 m и 2,5 m, а другата е во форма на квадрат со страна од 6 m. Пресметај ја вкупната плоштина за бојадисување и изрази ја во cm^2 . Колку литри боја ќе бидат потребни ако за 5 m^2 треба 1 литар боја?
3. Еден парк има цветна градина во форма на квадрат со страна 12 m. Околу градината се поставува патека широка 2 m. Пресметај ја вкупната плоштина на градината и патеката и изрази ја во cm^2 .
4. На една трпезариска маса во форма на правоаголник со страни 1,8 m и 0,9 m се поставува чаршаф во форма на рамнокрак правоаголен триаголник со катета 15 cm.
 - а) Колку е плоштината на чаршафот, изразена во mm^2 ?
 - б) Колку квадратни сантиметри од трпезариската маса ќе останат непокриени?
5. Подот на една сала е правоаголник со димензии 8,5 m и 6 m. Колку плочки во форма на квадрат со страна 20 cm ќе бидат потребни за покривање на 70 % од подот?
6. Еден дизајнер прави украсни огледала. Тие имаат форма на квадрат со страна 80 cm, но на два спротивни агли има дрвен украс во форма на рамнокрак правоаголен триаголник со катети по 20 cm. Колкава е плоштината на делот што го зафаќа само огледалото (непокриениот дел)?

7. Прозорците на една куќа се составени од дрвени квадратни рамки со страна 1,5 m и правоаголни стаклени отвори со димензии 1,2 m и 0,8 m. Колкава е плоштината на дрвениот дел на еден прозорец и за 10 прозорци?
8. Во правоаголна просторија со димензии 5 m и 4 m се поставува тепих со димензии 3 m и 2 m. Колкава плоштина од просторијата останува непокриена? Изрази ја во dm^2 .
9. Еден градежник поставува бетонска основа во форма на правоаголен триаголник. Плоштината на бетонската основа е 24 m^2 , а едната катета на правоаголниот триаголник е 8 m. Колкава е другата катета на бетонската основа?
10. Во една градина има правоаголен цвеќарник со плоштина од 15 m^2 и ширина од 3 m. Колкава е должината на цвеќарникот?
11. Сообраќаен патен знак со форма на правоаголен триаголник има една катета 1,2 m, а плоштината е $0,72 \text{ m}^2$. Колку е другата катета на знакот?
- *12. Еден дизајнер прави квадратна табла со плоштина од $2,56 \text{ m}^2$. Колкава е должината на страната на таблата?
- *13. Една просторија има под во форма на правоаголник е покриена со 36 m^2 ламинат, а должината на едната страна е четирипати поголема од другата. Колку метри лајсни треба да се купат за да се постават по крајот на ламинатот, односно до секој ѕид на просторијата?

Волумен и мерни единици за волумен

Во оваа лекција ќе се запознаеш со поимот волумен, односно мерката за делот од просторот што го зафаќа некоја 3Д-форма. Ќе научиш кои мерни единици се користат за волумен, нивните ознаки и врските меѓу нив. Наученото ќе ти помогне да пресметуваш волумен и да ги користиш мерните единици во секојдневниот живот, како и во математичките задачи што ќе ги решаваш.

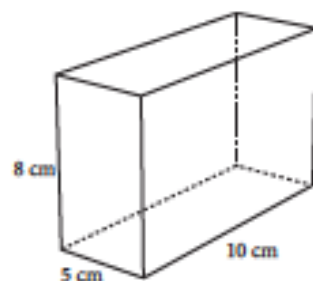


Пример 1

На цртежот е дадена кутија во форма на квадар.

Одговори на следниве прашања:

- Колкава е должината на кутијата?
- Колкава е ширината на кутијата?
- Пресметај ја плоштината на ѕидот на кутијата која има должина 10 cm и ширина 5 cm.
- Колку ѕида има кутијата со должина 10 cm и ширина 8 cm?
- Објасни зошто кутијата е 3Д-форма.



Решение:

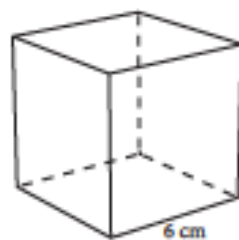
- Должината на кутијата е 10 cm.
- Ширината на кутијата е 5 cm.
- $P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$.
- Кутијата има два ѕида со должина 10 cm и ширина 8 cm.
- Кутијата е со три димензии (10 cm, 5 cm, 8 cm) затоа велиме дека кутијата е 3Д-форма (тридимензионална), односно таа опфаќа дел од просторот во кој се наоѓа.

Задача 1

На цртежот е дадена коцка.

Одговори на следниве прашања:

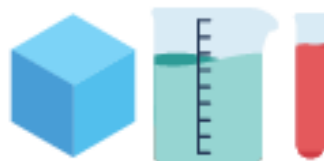
- Колкава е должината на секој раб на коцката?
- Пресметај ја плоштината на еден ѕид на коцката.
- Кои предмети што ги користиш во секојдневниот живот личат на коцка? Наведи барем два примери.



Секое цврсто тело има своја форма, големина и положба.

Течностите и гасовите немаат постојана форма.

Нивната форма зависи од садот во кој се наоѓаат.

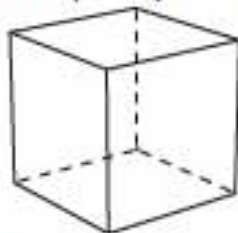


Делот од просторот што го зафаќа една 3Д-форма се вика нејзин волумен.

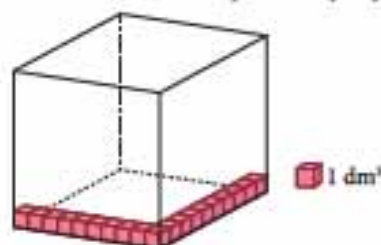
Пример 2

Мерките за волумен се изведени од мерките за должина.

- а) Колку е волуменот на коцката со раб еден метар?



- б) На цртежот е дадена празна коцка со волумен 1 m^3 . Колку коцки со волумен 1 dm^3 би можеле да се соберат во кутијата од 1 m^3 ?



Решение:

- а) Волуменот на коцката со раб 1 m е изразен како $1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$, а тоа е 1 m^3 .
Објасни зошто.

Волуменот на коцка со раб еден метар (единична коцка) е основна единица мерка која се нарекува метар кубен и се означува со 1 m^3 .

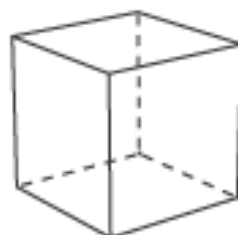
Да го определиме волуменот на некоја 3Д-форма, всушност, значи да се определи колку единични коцки се содржат во дадената 3Д-форма.

- б) Од погоре се забележува дека во еден ред на коцката може да наредиш $10 \cdot 10 = 100$ коцки со раб од 1 dm . Зошто?
Бидејќи висината на коцката е 1 m , односно 10 dm , тогаш по висина може да се наредат 10 реда со по 100 коцки или $10 \cdot 100 = 1000$ коцки. Можеме да заклучиме дека $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$.

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

Задача 2

- а) На цртежот е дадена празна кутија во форма на коцка со раб од 1 dm. Колку вкупно помали кутии во форма на коцки со раб од 1 cm можеш да наредиш во кутијата со раб од 1 dm?



Со решавање на примерот 2 и задачата 2 може да се заклучи дека секоја следна мерка за волумен е 1000 пати поголема или помала од претходната, во зависност од тоа дали се движиме кон поголеми или помали единици.

На пример:

1 метар кубен (1 m^3) = 1000 дециметри кубни (1000 dm^3)

1 дециметар кубен (1 dm^3) = 1000 сантиметри кубни (1000 cm^3)

1 сантиметар кубен (1 cm^3) = 1000 милиметри кубни (1000 mm^3)

Ова значи дека секогаш кога се движиме од поголема кон следната помала мерна единица за волумен, го множиме мерниот број со 1000, а кога се движиме од помала кон следната поголема мерна единица, делиме со 1000.

Пример 3

Дадена е коцка со волумен 3 dm^3 .

- а) Запиши го волуменот на коцката во cm^3 .
 б) Запиши го волуменот на коцката во m^3 .
 в) Земи сад во форма на коцка со волумен 1 dm^3 и стави вода. Колку вода собира во садот?

Решение:

а) $3 \text{ dm}^3 = (3 \cdot 1000) \text{ cm}^3 = 3000 \text{ cm}^3$ $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

б) $3 \text{ dm}^3 = (3 : 1000) \text{ m}^3 = 0,003 \text{ m}^3$ $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$

- в) Ако во сад во форма на коцка со волумен 1 dm^3 ставиш вода, а потоа таа вода ја претуриш во мерило (сад за мерење течност како на сликата), ќе прочиташ дека во садот собрало 1 литар вода.



$1 \text{ литар} = 1 \text{ dm}^3$

Како што знаеш од претходно, литар е единица за зафатнина (волумен) што се користи за мерење течности и гасови.

Од $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$, се добива $1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$.

Задача 3

Во еден резервоар има волумен од 6 dm^3 вода. Колку литри вода има во резервоарот?

Задача 4

Во фабрика за пакување вода еден пластичен сад содржи 3 m^3 вода. Водата треба да се распредели во помали пластични садови, така што секој да собира 5 литри. Колку пакувања од 5 литри ќе бидат потребни?

Упатство:

- Пресметај колку dm^3 има во 3 m^3 .
- Пресметај колку литри вода има во 3 m^3 .
- Пресметај колку пакувања од по 5 литри ќе бидат потребни за да се распореди целото количество вода.

Задача 5

Нов аквариум за риби во зоолошката градина има форма на квадар со волумен 1 m^3 .

- а) Пресметај колку литри вода ќе бидат потребни за да се наполни аквариумот.
- б) Колку контејнери со капацитет од 20 литри ќе бидат потребни за да се наполни целиот аквариум?

Како можеш да ги поврзеш единиците за волумен (метри кубни, дециметри кубни, сантиметри кубни и литри) со примерите од секојдневниот живот? Каква е важноста на овие мерни единици за различни ситуации? Како ги претвораеш кубните метри во литри? Кои се другите врски и која од нив ти е најлесна и зошто?

Одговори ги прашањата во твојата тетратка. Ако одговорот е НЕ, врати се на делот на лекцијата на кој се однесува прашањето.

1. Дали ги разбираам единиците за волумен и нивните врски? Да / Не
2. Дали успеав да ги решам задачите во кои се бара да ја користам врската меѓу метри кубни, дециметри кубни, сантиметри кубни и литри? Да / Не
3. Какви дополнителни вежби или примери би сакал да разгледам за да го подобрам моето разбирање за волумен и врската меѓу единици за волумен? (Напиши краток одговор)

Самостојна работа

1. Претвори $12,5 \text{ m}^3$ во дециметри кубни (dm^3).
2. Претвори ги во литри (l), 5000 dm^3 .
3. Колку сантиметри кубни (cm^3) се 2 dm^3 ?
4. Колку метри кубни (m^3) се 8000 l вода?
5. Во една бочва има волумен 5 m^3 течност. Колку литри течност има во бочвата?
6. Претвори $0,25 \text{ dm}^3$ во cm^3 .
7. Колку метри кубни (m^3) имаат 3000 cm^3 песок?
8. Истражувај за месечната потрошувачка на вода на твоето семејство. Во која мерна единица е изразена потрошената вода? Претвори во други мерни единици (на пример: литри, килолитри, метри кубни).
9. Кој од дадените волумени: 1 dm^3 , 10 cm^3 , 100 cm^3 , 1000 mm^3 е најголем?
10. Кој од дадените волумени: 2 dm^3 , 300 cm^3 , 400 mm^3 , $0,4 \text{ m}^3$ е најмал?
11. Дали волуменот од $6\,000\,000 \text{ cm}^3$ може да се запише како $0,6 \text{ m}^3$? Објасни го твојот одговор.
12. Користи еден од знаците: $>$, $<$, $=$ за да ги споредиш волумените.
 - а) $0,5 \text{ l}$ и $\frac{1}{2} \text{ dm}^3$
 - б) 340 cm^3 и 2 dm^3
 - в) 1500 cm^3 и 2 l
 - г) 820 dm^3 и $0,4 \text{ m}^3$.

Волумен на квадар и на коцка

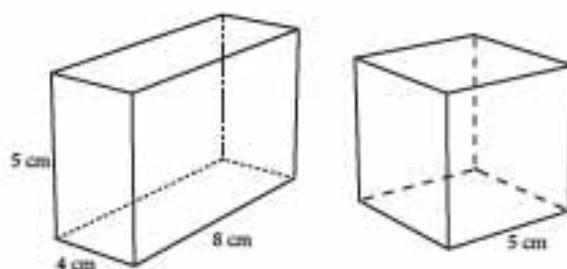
Во секојдневниот живот често се среќаваш со 3Д-форми како коцка и квадар. Тие се присутни во многу ситуации – од процена на просторот што го зафаќа некоја кутија до пресметка на количината течност што може да ја собере резервоар во форма на квадар. За успешно да ги изведуваш овие пресметки, важно е да ги разбереш основните формули за волумен на коцка и на квадар. Токму оваа лекција ќе ти помогне да ја совладаш оваа клучна вештина.



Пример 1

На училишниот натпревар за изработка на подароци твоја задача е да изработиш пакетчиња со колачи за другарчињата. Колачите треба да се стават во мали кутичиња што имаат форма на коцка или квадар.

- Како би ги опишал формите на овие кутии (што е коцка, а што е квадар)?
- Колку зида и кои 2Д-форми ги има на секоја од кутиите?



Решение:

- Користи го цртежот и објасни што е квадар, а што коцка?
- Квадарот и коцката имаат 6 зида. Од цртежот запиши кои 2Д-форми ги има квадарот, а кои коцката?

Пример 2

Тимот за уредување на училишниот кабинет сака да направи дрвени кутии за училиштен прибор, а секоја кутија да има форма на квадар или коцка.

- Една дрвена кутија има форма на квадар. Должината на кутијата е 12 cm, ширината е 8 cm, а висината е 5 cm.

Прашања:

- Колку мали коцки со раб 1 cm собира во неа?
 - Изведи ја формулата за волумен на квадар со помош на должината, ширината и висината.
- Друга дрвена кутија има форма на коцка со раб од 6 cm. Изведи ја формулата за волумен на коцка.

Решение:

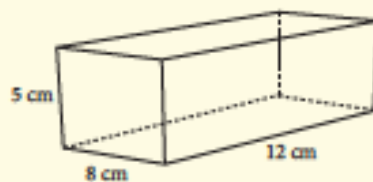
- Првата кутија за прибор има форма на квадар. Ако секоја мала коцка има волумен од 1 cm^3 , бројот на коцки што ќе ги собере во неа е еднаков на мерниот број за волуменот на квадарот.

Бројот на коцки што може да се наредат во основата на квадарот по должина и ширина е $12 \cdot 8$, а бидејќи има 5 такви реда, се добива вкупно $12 \cdot 8 \cdot 5 = 480$ коцки со волумен од 1 cm^3 . Тие 480 коцки ја пополнуваат кутијата со форма на квадар, односно волуменот на квадарот е 480 cm^3 .

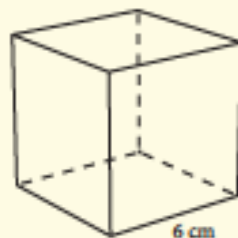
Значи, волумен на квадарот = должина · ширина · висина.

Ако волуменот, должината, ширината и висината на квадарот ги означиме со V , a , b , c соодветно, тогаш $V = a \cdot b \cdot c$.

$$V = 12 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 480 \text{ cm}^3.$$



- б) Бидејќи овој пат кутијата што треба да се изработи е коцка, а коцката е квадар со еднакви димензии ($a = b = c$), во формулата за волумен на квадар, кога ширината и висината ги означуваме со a , исто како и должината, добиваме $V = a \cdot a \cdot a = a^3$. Бидејќи работ на коцката е $a = 6$ cm, се добива $V = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ cm³. Значи, волуменот на коцката е 216 cm³. Кутијата собира 216 коцки со волумен од 1 cm³.



Задача 1

Базен во форма на квадар има димензии 10 m, 5 m и 8 m. Колку литри вода собира базенот?

Задача 2

Врати се на пример 1 и одговори на следното прашање: Која кутија ќе ја избереш доколку треба да ставиш колачи во кутијата што може да собере повеќе?

Пример 3

Ана купила кутија во форма на квадар за да спакува подарок за својата пријателка. На кутијата пишувало дека должината е 20 cm, ширината е 10 cm, а висината не е наведена. Ана знаела дека волуменот на кутијата е 2000 cm³.

- Колкава е висината на кутијата?
- Колку мали коцки со раб од 2 cm може да собере оваа кутија?

Решение:

- Волумен на кутијата се пресметува со формулата $V = a \cdot b \cdot c$. Ако во формулата ги замениш познатите вредности за должината и ширината на кутијата, ќе добиеш $2000 = 20 \cdot 10 \cdot c$ ќе добиеш $2\,000 = 200 \cdot c$, $c = \frac{2\,000}{200} = 10$. Значи, висината на кутијата е 10 cm.
- Волуменот на коцка е: $V = a^3$ Ако за a замениш 2 cm, се добива $V = (2\text{ cm})^3 = 8\text{ cm}^3$. Значи волуменот на една коцка е 8 cm³.
Број на коцки со раб 2 cm што ќе ги собере во големата кутија = волумен на кутијата : волумен на една коцка = $2000\text{ cm}^3 : 8\text{ cm}^3 = 250$. Значи, кутијата може да собере 250 мали коцки.

Задача 3

Книжарница има шкафови во форма на квадар со должина 1,5 m, ширина 50 cm и висина 2 m. Сопственикот сака да знае:

- Колкав е волуменот на еден шкаф?
- Ако секоја книга зафаќа простор од 1500 cm³, колку книги може да собере во еден шкаф?

Ако имаш две кутии со ист волумен, дали тие мора да имаат исти димензии? Објасни.
Ако ја удвоиме должината на страната на коцка, како ќе се промени нејзиниот волумен?
Како ќе влијае на волуменот промената на висината на квадар, ако должината и ширината не се менуваат?

Одговори во твојата тетратка и сподели ги одговорите со еден од твоите соученици.

1. Дали си сигурен/на во твоето разбирање на формулите за волумен на коцка и на квадар?
2. Кои задачи ти беа полесни, а кои ти беа потешки?
3. Каде треба да се подобриш во однос на пресметување волумен на квадар и на коцка?
4. Размисли за ситуации од секојдневниот живот каде што може да примениш волумен на квадар и на коцка.

Самостојна работа

1. Пресметај го волуменот на коцка со раб 15 cm.
2. Пресметај го волуменот на квадар со страни 12 dm, 15 dm и 18 dm.
3. Ти треба кутија во која ќе ги ставиш сите твои книги. Кутијата е во форма на коцка со страна 30 cm. Колку книги може да ставиш во оваа кутија ако знаеме дека една книга зафаќа 400 cm^3 ?
4. Резервоар во форма на квадар има рабови со должина 4 m, 3 m и 2 m. Колку литри вода ќе собере?
5. Тони сака да направи кутија за складирање алати во својата градина. Кутијата има форма на квадар, а дното на кутијата има плоштина од 4800 cm^2 . Пресметај го волуменот на кутијата ако висината на кутијата е 50 cm.
6. Магацин има форма на квадар со должина 3 m, ширина 2,5 m и висина 2 m.
 - а) Пресметај го волуменот на магацинот.
 - б) Ако во магацинот треба да се сместат кутии во форма на коцка со страна 50 cm, колку кутии најмногу може да се сместат во магацинот?
7. Камион е натоварен со огревно дрво. Колку кубни метри дрво има во камионот ако тие се наредени во форма на квадар со димензии 3 m, 4 m и 1,5 m?
- 8.* Во дворот на Јован има резервоар во форма на коцка што се користи за собирање дождовна вода. Тој собира 512 литри вода.
 - а) Колкава е должината на страната на резервоарот?
 - б) Ако еден ден врне доволно за да го наполни резервоарот до половина, колкав волумен на вода (во литри) ќе содржи резервоарот?

Пресметување плоштина на коцка и на квадар од нивните мрежи

Во секојдневниот живот често се среќаваш со предмети во форма на коцка или квадар, како кутиите за подароци, мебелот и разни пакувања. За да дознаеш колку материјал е потребен за да се изработи таков предмет или да го покриеш, на пример, со платно, треба да ја пресметаш неговата вкупна плоштина.



Во оваа лекција ќе научиш како да ги користиш мрежите на коцка и на квадар за да ја пресметаш нивната плоштина. Ќе разгледаш примери од реалниот живот и ќе научиш како да применуваш формули за вкупната плоштина во различни контексти. Ова знаење ќе ти помогне да ги разбереш и решаваеш практичните проблеми поврзани со дизајн, пакување и изработка.

Пример 1

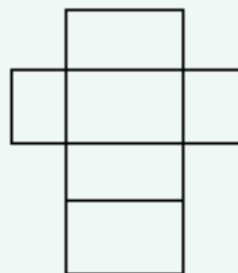
Марија изработува модели на кутичиња за подароци. Таа користи листови хартија за да направи развиена мрежа на квадар. Една од кутиите што ја изработила има должина од 8 cm, ширина од 5 cm и висина од 4 cm.

Марија ја развива кутијата во мрежа и добива 6 правоаголници. Таа сака да провери дали мрежата е точна и дали може да ја состави кутијата.

- Колку правоаголници со димензии 8 cm и 5 cm ќе содржи мрежата?
- Колку правоаголници со димензии 8 cm и 4 cm ќе содржи мрежата?
- Колку правоаголници со димензии 5 cm и 4 cm ќе содржи мрежата?
- Провери дали сите овие правоаголници се доволни за да се состави кутијата (квадарот) и нацртај ја мрежата.

Решение:

- Има 2 правоаголници со димензии 8 cm и 5 cm.
Овие правоаголници се двата големи зида на квадарот.
- Има 2 правоаголници со димензии 8 cm и 4 cm.
Овие правоаголници се двата зида на квадарот кои се подолги и потесни.
- Има 2 правоаголници со димензии 5 cm и 4 cm.
Овие правоаголници се двата помали зида на квадарот.
- Мрежата на квадарот има вкупно 6 правоаголници.
Бројот и димензиите на правоаголниците се точни за составување квадар.

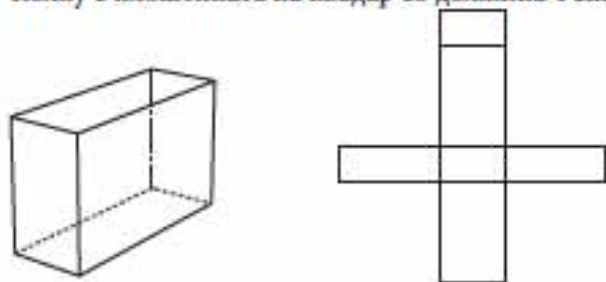


Задача 1

Пронајди и измери ги димензиите на предмет во училиницата кој има форма на коцка (на пример, кутија, книга, клупа...). Нацртај ја неговата мрежа.

Пример 2

Колку е плоштината на квадар со должина 4 cm, ширина 3 cm и висина 2 cm?



Решение:

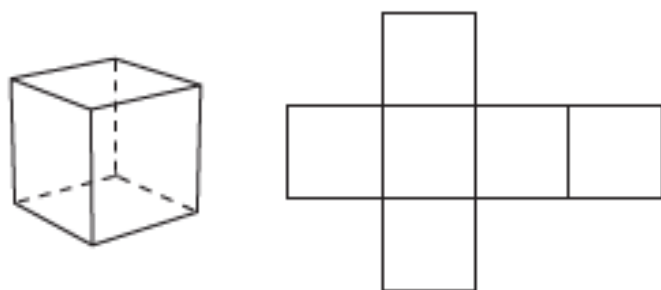
Имаме квадар со должина 4 cm, ширина 3 cm и висина 2 cm. Плоштината на секој сид е:
 $a \cdot b = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$, $a \cdot c = 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$, $b \cdot c = 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.

Бидејќи од секој правоаголник има по два, вкупната плоштина е $2 \cdot (12 + 8 + 6) = 2 \cdot 26 = 52 \text{ cm}^2$.

Формулата за плоштина на секој квадар може да се запише $P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Пример 3

Колку е плоштината на коцка со раб 3 cm?



Решение:

Од мрежата може да се види дека коцката има шест еднакви зида. Секој сид е квадрат со страна 3 cm. Плоштината на секој квадрат е $3^2 = 9 \text{ cm}^2$. Вкупната плоштина на коцката е $6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$. Зошто?

Формулата за плоштина на секоја коцка може да се запише $P = 6a^2$

Задача 2

Нацртај мрежа на квадар со должина 5 cm, ширина 3 cm и висина 4 cm. Потоа, користејќи ја мрежата на квадарот, пресметај ја неговата плоштина.

Задача 3

Нацртај мрежа на коцка со раб 5 cm. Потоа, користејќи ја мрежата на коцката, пресметај ја нејзината плоштина.

Пример 4

Мартин сака да го бојадиса складиштето во кое чува алати. Складиштето е во форма на квадар и има должина од 6 m, ширина од 4 m и висина од 3 m.

- Колкава е вкупната плоштина на сите сидови на складиштето?
- Ако сака да бојадиса само три од сидовите, пресметај ја нивната вкупна плоштина.
- Колкава е вкупната плоштина на подот и таванот заедно?

Решение:

- а) Пресметка на вкупната плоштина на сите сидови:

$$P = 2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot 54 = 108 \text{ m}^2$$

- б) Пресметка за бојадисување три зида:

Плоштина на три зида (на пример, два со димензии 6 m на 3 m и еден со димензии 4 m на 3 m):

$$P = 18 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2 + 12 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2.$$

- в) Пресметка на вкупната плоштина на подот и таванот:

$$P = P_{\text{П}} + P_{\text{Т}} = 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$$

Задача 4

Давид сака да ги бојадиса сите сидови на складиштето, но не и таванот и подот.

Производителот на бојата наведува дека 1 литар боја може да покрие 5 m^2 . (Користи ги димензиите за складиштето од пример 4)

- Колку литри боја ќе му бидат потребни за да ги бојадиса сите сидови на складиштето?
- Ако секоја канта содржи по 10 литри боја, колку канти боја ќе треба да купи Давид?

Ако ја зголемиме должината на работ на коцката двапати, што ќе се случи со нејзината плоштина? Како може да ти помогне мрежата на квадарот за побрзо да ја пресметаш неговата плоштина?

Оцени го твоето знаење за плоштина на квадар и коцка. Повторно наврати се на деловите од лекцијата за кои не си сигурен/а за твоите знаења.

Оцена: 5 - Можам самостојно да ги идентификувам страните, да ја изготвам мрежата и точно да ја пресметам вкупната плоштина на квадар и на коцка.

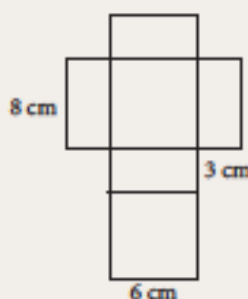
Оцена: 3-4 - Понекогаш ми треба помош да нацртам мрежа на квадар и на коцка и да направам точни пресметки на плоштината.

Оцена: 1-2 Имам тешкотии во поврзувањето на податоците и примената на формулите. Потребна ми е дополнителна помош и вежбање за целосно да ги разберам и применувам концептите.

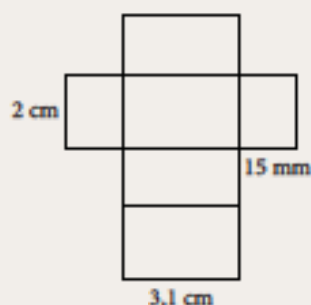
Самостојна работа

1. Пресметај ја плоштината на квадар или коцка од дадените мрежи

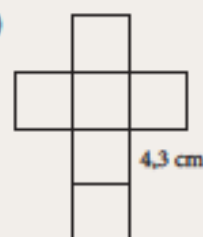
а)



б)



в)



- Вкупната плоштина на коцка е 150 cm^2 . Колку е работ на коцката?
- Еден сид на коцката има плоштина од 64 cm^2 . Пресметај ја вкупната плоштина на коцката.
- Основата на квадар е правоаголник чија плоштина е 120 cm^2 . Ширината на основата е 6 cm, а висината на квадарот е 10 cm. Пресметај ја плоштина на квадарот.
- Основата на квадар е квадрат со страна 8 cm. Висината на квадарот е 1 cm. Пресметај ја вкупната плоштина на квадарот.

6. Плоштината на еден од ѕидовите на коцката изнесува 36 cm^2 . Пресметај ги работ на коцката и вкупната плоштина на коцката.
7. Плоштината на основата на квадарот е 54 cm^2 , а ширината на основата е 9 cm .
 - а) Пресметај ја должината на основата.
 - б) Ако висината на квадарот е 10 cm , пресметај ја неговата плоштина.
8. Коцка има волумен 343 cm^3 . Пресметај ја плоштината на коцката.
- *9. Квадар има: основа со плоштина 50 cm^2 , преден ѕид со плоштина 70 cm^2 и висина 7 cm . Колку е вкупната плоштина на квадарот?
- *10. Плоштината на еден страничен ѕид на квадар е 60 cm^2 . Знаеме дека висината на квадарот е 8 cm и основата на квадарот е квадрат. Пресметај ги страната на основата и вкупната плоштина на квадарот.
11. Собата на Дејан е квадар чии бочни ѕидови имаат плоштини $7,5 \text{ m}^2$ и $10,5 \text{ m}^2$.
 - а) Колку е плоштината на подот ако вкупната плоштина на собата е 56 m^2 ?
 - б) Ако за еден метар квадратен од подот му требаат по 10 плочки, тогаш колку плочки му требаат за целиот под?
 - в) За еден метар квадратен му треба по 0,5 l боја. Колку литри боја му требаат за таванот?
12. Семејството Петровски купило отворен аквариум во форма на коцка за своите риби. На ознаката пишува дека целата површина на аквариумот е 720 cm^2 . Одреди ја должината на страната на коцката и пресметај колку литри вода собира аквариумот.
13. Емилија сака да изработи кутија во форма на коцка за подарок. Таа користи картон и сака страната на кутијата да биде таква што вкупната плоштина на кутијата да биде 600 cm^2 . Одреди ја должината на страната на коцката и пресметај го волуменот на кутијата.

Т Е М А

5

РАБОТА СО ПОДАТОЦИ



Во секојдневниот живот постојано сме опкружени со податоци: колку ученици има во училиштето, колку време поминуваме во учење, колку сончеви денови имало месецов, резултати од спортски натпревар, колку пати сме ја посетиле библиотеката. Кога ги собираме, уредуваме и прикажуваме овие информации, всушност, работиме со податоци.

Работата со податоци не е само математика – тоа е моќна вештина што ќе ти помогне да размислуваш логично, да носиш одлуки и да им ги објасниш своите идеи на другите.

„Математиката е кралица на науките, а статистиката е нејзината слугинка.“

Резултати од учењето

По изучувањето на оваа тема ќе бидеш способен/а да:

- избираш начин на собирање, организирање и претставување на дискретни податоци, по потреба и групирани во еднакви интервали.
- толкуваш податоци претставени со дијаграми и донесуваш заклучоци според модата или модална класа за групирани податоци, медијана и ранг.
- го користиш јазикот на веројатноста за да опишеш и толкуваш настан.

Планирање на истражување

Во секојдневниот живот често се соочуваш со ситуации каде што ти е потребно да донесеш заклучоци врз основа на податоци. На пример, кога планираме семеен излет, треба да собереме информации за времето, популарните дестинации, сместувањето, како и мислењата на членовите на семејството. Слично на тоа, во науката и работата планирање на истражување е основа за добивање точни и корисни резултати. Со оваа лекција ќе научиш како да направиш план за истражување, да изработиш и да користиш инструменти за собирање податоци, како на пример анкети, прашалници и мерења.



Пример 1

Учениците во твоето одделение сакаат да дознаат какви овошја најмногу сакаат учениците од училиштето. Планирај истражување и одговори на следниве прашања:

- Кој начин на собирање податоци ќе го користиш: анкета, интервју, набљудување и сл.? Објасни зошто го избра тој начин на собирање на податоците.
- Состави 3 прашања за анкетата или друг инструмент.
- Собери податоци од 10 ученици од твоето одделение и прикажи ги податоците во табела.

Решение:

- а) Може да користиш анкета бидејќи е брз и ефикасен начин за собирање мислења од поголем број ученици.

Анкетата е лесна за дизајнирање, а одговорите можат да се анализираат и визуализираат со табела или дијаграм.

б) Прашања за анкетата:

- Кое е твоето омилено овошје?
А) Јаболко Б) Банана В) Портокал Г) Друго _____
- Колку често јадеш овошје?
А) Секој ден
Б) Неколку пати неделно
В) Еднаш неделно
Г) Ретко
- Дали би сакал во училишното бифе да има повеќе овошја?
А) Да Б) Не

В) Одговори по прашања од 10 ученици

Табела- омилено овошје на ученици

Ученици	Прашања		
	Кое е твоето омилено овошје?	Колку често јадеш овошје?	Дали би сакал повеќе овошје во бифето
1.	Јаболко	Секој ден	Да
2.	Банана	Неколку пати неделно	Да
3.	Портокал	Секој ден	Не
4.	Друго (грозје)	Неколку пати неделно	Да
5.	Банана	Секој ден	Не
6.	Јаболко	Еднаш неделно	Да
7.	Јаболко	Секој ден	Не
8.	Портокал	Ретко	Да
9.	Банана	Секој ден	Не
10.	Друго (киви)	Еднаш неделно	Да

Избери дијаграм и претстави ги податоците за омилените овошја и кои овошја најмногу се конзумираат?

Задача 1

Откриј која е омилената активност на твоите соученици за време на одморите.

- Како би го започнал истражувањето?
- Кои податоци ти се потребни?
- Како би ги собрал податоците?

Истражувањето е процес на поставување прашања, собирање податоци, нивна анализа и донесување заклучоци за одреден проблем или тема. Тоа е начин на откривање нови информации или решавање одредени проблеми преку организирана работа.

Истражувањето ти помага да научиш нешто ново, подобро да ги разбереш луѓето и ситуациите околу тебе и да донесеш одлуки врз основа на информации.

Пример 2

Твоето училиште размислува да организира нова волонтерска активност, но сака да дознае што би било најинтересно за учениците. Тебе ти е доверена задачата да направиш истражување за да откриеш која активност учениците би ја сакале најмногу. Твојата задача е да направиш план за истражување, да изработиш инструмент за собирање податоци и да собереш информации од учениците.

Решение:

За да направиш план за истражување, следи ги чекорите и запишувај ги во твојата тетратка за тоа што сакаш ти да истражуваш.

Чекори за истражување:

1. Идентификување на проблемот или прашањето:
 - Прво, треба да одлучиш што точно сакаш да дознаеш или истражиш. Пример: „Кои се најчестите хобија на учениците од нашето училиште?“
2. Планирање на истражувањето:
 - Размисли за начинот на кој ќе ги собереш податоците (анкета, интервју, набљудување).
 - Одлучи кои алатки ќе ги користиш (прашалник, анкета, табела).
 - Одреди кого ќе вклучиш во истражувањето (на пр., ученици од твоето одделение).
3. Собирање податоци:
 - Во овој чекор можеш да спроведеш анкета или интервјуа, да набљудуваш ситуации или да собираш информации од книги и интернет. Пример: Направи анкета со прашања како: „Кое е твоето омилено хоби?“ или „Колку време неделно посветуваш на хоби?“
4. Селектирање и организирање на податоците:
 - Подредувај ги податоците во табели, дијаграми или списоци за полесно да ги анализираш. Во овој пример прикажи колку ученици го избрале секое хоби во дијаграм.
5. Анализа на податоците:
 - Размисли што ти покажуваат собраните податоци.
 - Спореди различни одговори и обиди се да ги поврзеш информациите.
Пример: Доколку 60 % од учениците избрале спорт како хоби, тоа може да значи дека спортот е најпопуларното хоби.
6. Донесување заклучоци:
 - Напиши што си научил од истражувањето.
 - Одговори на прашањето што го постави на почетокот. Пример: „Најчестото хоби меѓу учениците е спорт, а потоа следуваат музика и уметност.“
7. Презентирање на резултатите:
 - Направи извештај или презентација за да ги споделиш резултатите со другите.
Пример: Користи табели, дијаграми и краток текст за да ги објасниш резултатите.



идентификување
на проблемот



планирање на
истражувањето



собирање
податоци



организирање
на податоците



анализа на
податоците



донесување
заклучоци

Задача 2

Проблем за истражување: Како различните фактори на животната средина влијаат врз растот на растенијата?

Во седмо одделение учиш за животната средина, екосистемите и факторите што влијаат врз живите организми. Твоето истражување нека се фокусира на тоа како факторите како светлина, вода, температура и почва влијаат врз растот на растенијата. Направи план за истражување.

За истражувањето што го имаш направено размисли и одговори на прашањата: Дали целта на истражувањето беше јасно дефинирана? Колку беше ефикасен избраниот метод за собирање податоци? Што би направил поинаку следниот пат?

Оцени се според следниве критериуми:

- План кој е јасен и лесен за следење (1–5).
- Креативност во изборот на инструмент (1–5).
- Применливост на резултатите од истражувањето (1–5).

Самостојна работа

Избери предмет и проблем за кој ќе направиш истражување.

1. Биологија

- Како различни типови на почва влијаат врз растот на растенијата?
- Кој вид храна дава најмногу енергија за време на спортски активности?
- Како влијае загадувањето врз квалитетот на водата во локалните реки?

2. Хемија

- Кој пијалак предизвикува најголема промена на рН-вредноста на забите?
- Како различни видови растворувачи влијаат врз растворливоста на шеќерот?
- Дали домашно направени средства за чистење се исто толку ефикасни како комерцијалните?

3. Физика

- Дали различни материјали од кои се направени садовите влијаат врз топлинската изолација на водата во нив?
- Како влијае подлогата врз брзината на движење на тело по неа?
- Кој тип хартија создава најдобар авион за најдолг лет?

4. Географија

- Како климатските промени влијаат врз годишните времиња во твојот регион?
- Како различните видови релјеф влијаат врз температурите во блиските места?
- Кои се најчестите природни ресурси во твојата околина и како се користат?

5. Историја

- Како се разликуваат животните услови во различни епохи (на пр., средновековие и модерно време)?
- Како развојот на технологијата влијаел врз комуникацијата во минатото?
- Кои историски настани имале најголемо влијание врз локалната заедница?

6. Техничко образование

- Кој од материјалите дрво, пластика или хартија е најпрепорачан за обработка во наставниот предмет техничко образование?
- Како соларните панели можат да се користат за намалување на потрошувачката на електрична енергија?
- Кои се предностите и недостатоците на различните видови обновливи извори на енергија?

7. Математика

- Како се разликува просечната дневна температура во текот на еден месец во различни региони?
- Кои математички концепти се најзастапени во секојдневниот живот?
- Како се користат геометриските форми во архитектурата на локалните згради?

8. Информатика

- Како може да се зголеми безбедноста на интернет на учениците?
- Дали различните типови датотеки (JPEG, PNG) го менуваат квалитетот на сликите?
- Како софтверите за обработка на податоци можат да се користат за анализа на анкети?

Собирање и организирање податоци за истражување

Дали некогаш си се обидел да направиш табела со имињата и омилените активности на твоите другари? Собирањето податоци е првиот чекор кон добивање информации кои можеш да ги анализираш и да извлечеш заклучоци. Во оваа лекција ќе се потсетиш како да собираш и организираш податоци на начин што е клучен чекор во истражувачкиот процес.



Пример 1

Учениците од шесто одделение направиле анкета за да дознаат колку часа дневно нивните соученици поминуваат гледајќи телевизија. Податоците што ги собрале се следните (измерено во часови): 1, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 2, 1, 3, 4.

Помогни им да ги организираат податоците во табела на фреквенција.

Решение:

Чекор 1: Групирање на податоците

Прво, ги идентификуваме сите различни вредности во податоците (1, 2, 3, 4 часа).

Чекор 2: Броење на фреквенциите

Се брои колку пати се појавува секоја вредност во податоците:

1 час: 4 пати; 2 часа: 6 пати; 3 часа: 6 пати и 4 часа: 4 пати

Или може вака да се соберат податоците: 1 час: ///; 2 часа: ####; 3 часа: #### и 4 часа: ///

Чекор 3: Пополнување на табелата

Табелата на фреквенција ќе изгледа вака:

Часови поминати во гледање на ТВ

Број на часови (h)	Фреквенција (f)
1	4
2	6
3	6
4	4

Чекор 4: Анализа на табелата

- Најголем број ученици (6) гледаат телевизија 2 или 3 часа дневно.
- Помал број ученици (4) гледаат телевизија 1 или 4 часа дневно.

Задача 1

Учениците од едно училиште биле анкетирани за местото каде што се хранат додека се на училиште.

- а) Дополни ја табелата во твојата тетратка.
 б) На кој начин најмногу се хранат учениците?
 в) Направи други споредувања.

Место каде се хранат учениците

Начин на хранење	Знак	Број на ученици
Училишна кујна	### ### ### ### #	
Блиска сендвичарница	### ### ### ### /	
Храна од дома	### ### ### ///	
Не се хранат	### ### +	
Вкупно		

Пример 2

Во училишната библиотека, учениците сакале да дознаат колку книги читаат нивните соученици за еден месец. Собрале податоци од 30 ученици и ги добиле следниве броеви на прочитани книги: 7, 3, 5, 4, 2, 6, 8, 7, 3, 5, 5, 10, 2, 4, 6, 7, 1, 8, 4, 5, 3, 6, 7, 9, 6, 3, 2, 6, 5, 4.

При прибирањето на овие вредности, направено е пребројување (броење) на прочитаните книги. За вакви податоци велиме дека се дискретни податоци. Дискретни податоци се податоци што можат да примат само одредени, пребројливи вредности (на пр., број на книги, тактори, клупи).

- а) Групирај ги податоците во интервали по 2 според бројот на прочитани книги (на пример, 1-2 прочитани книги, 3-4, 5-6 итн.). Потсети се: Што е интервал?
 б) Направи табела на фреквенција која ги прикажува интервалите и колку ученици припаѓаат во секој интервал.
 в) Анализирај ја табелата и одговори: Во кој интервал има најмногу ученици? Во кој интервал има најмалку ученици?

Решение:

Чекор 1: Групирање на податоците во интервали

Ги организираме добиените вредности во групи по 2 според бројот на прочитани книги: 1-2 книги; 3-4 книги; 5-6 книги; 7-8 книги и 9-10 книги.

Зошто е корисно да ги групираме податоците во интервали?

- За да избегнеме непрегледни табели со многу редови за секоја поединечна вредност, можеме да ги групираме податоците во интервали.
- При голем број податоци, групирањето ги поедноставува и организира информациите за полесно анализирање.
- Со интервали можеме полесно да анализираме кој интервал на вредности е најчест (има најголема фреквенција) и како се распределени податоците.

Чекор 2: Броене на фреквенциите во секој интервал

1-2: 4 ученици; 3-4: 8 ученици; 5-6: 10 ученици; 7-8: 6 ученици и 9-10: 2 ученици

Чекор 3: Табела на фреквенција

Број на прочитани книги за 1 месец

Интервал (број на книги)	Фреквенција (број на ученици)
1 - 2	4
3 - 4	8
5 - 6	10
7 - 8	6
9 - 10	2
Вкупно	30

Чекор 4: Анализа на табелата

Најмногу ученици (10) припаѓаат во интервалот 5-6 книги, значи најголем дел од учениците прочитале 5 или 6 книги.

Најмалку ученици (2) припаѓаат во интервалот 9-10 книги.

Групирањето на податоците секогаш се прави во интервали со еднакви должини.

Задача 2

Учениците истражуваат колку време соучениците од нивниот клас трошат на патување до училиште. Тие спровеле анкета и ги добиле следниве одговори (во минути):

2, 23, 14, 18, 36, 21, 3, 7, 10, 15, 26, 24, 3, 16, 28, 9, 14, 32, 10, 22, 17, 5, 11, 6, 15, 8, 9, 17, 20, 16, 7, 30.

- Групирај ги податоците во интервали со должина од по 10 минути и креирај табела на фреквенција за бројот на ученици во секој интервал.
- Користејќи ја табелата, одговори: Кој интервал на време е најчест (во кој најмногу ученици патуваат)? Кој интервал на време е најретко застапен?
- Размисли и предложи две причини зошто учениците патуваат различно време до училиште.

Како групирањето на податоците во интервали помогна да се извлечат важни информации за податоците? Размисли дали постои друг начин на прибирање податоци освен со броене? Наведи примери на податоци кои може да се добијат со мерење со некој мерен инструмент.

Одговори ги прашањата во твојата тетратка и сподели ги со еден од твоите соученици.

- Дали правилно ги организирав податоците и ги групирав во соодветни интервали?
 - Да, ја создадов табелата точно и ги групирав податоците во соодветни интервали.
 - Почнав да создавам табела, но не ги одбрав најсоодветните интервали.
 - Не успеав да создадам точна табела на фреквенција.
- Дали го разбираам процесот на избор на интервали и како тие влијаат врз анализата на податоците?
 - Да, разбираам зошто е важно да ги избирам правилните интервали за податоците и како тие влијаат врз резултатите.
 - Се обидов да избирам интервали, но имав тешкотии да ја одредам најдобрата, најоптималната должина на интервалот.
 - Не разбрав зошто и како да ги групирам податоците во интервали.
- Дали можам да ја анализирам табелата и да извлечам значајни информации од податоците?
 - Да, можам да ја анализирам табелата и да извлечам корисни информации (како најчести интервали, распределба на податоците).
 - Можам да ги анализирам податоците, но не секогаш на точен начин.
 - Не можам да извлечам значајни информации од табелата.

Самостојна работа

- Во една свињарска фарма е извршено мерење на 120 свињи и притоа се добиени следните вредности во kg:

86	90	90	92	90	93	90	91	91	86	86	86	86	87	87
92	93	90	87	90	88	90	93	87	88	93	90	91	88	89
93	88	86	90	89	88	89	91	88	85	91	92	92	90	90
93	91	85	92	85	85	91	92	89	87	89	92	90	87	90
92	85	92	91	86	90	86	93	87	91	87	85	87	89	87
85	90	89	88	90	87	88	86	88	91	91	93	86	87	91
88	90	88	90	91	93	89	91	89	90	87	91	92	92	91
84	85	92	84	86	88	93	90	89	87	84	92	90	87	92

- Групирај ги податоците во интервали со должина 5 килограми и креирај табела на фреквенција за бројот на свињи во секој интервал.
- Користејќи ја табелата, одговори: Кој интервал има најмногу свињи и колкав дел претставува од вкупниот број на свињи? Кој интервал има најмалку свињи и колкав дел претставува од вкупниот број на свињи?
- Донеси други заклучоци.

2. Дадена е висината на 52 ученици во cm:

153	145	156	154	153	157	155	145	146	153	158	146	158
148	151	159	157	146	154	159	147	153	154	157	146	148
147	159	159	152	148	153	159	155	148	148	158	148	157
151	147	154	153	146	152	148	157	153	146	155	146	153

- Групирај ги податоците.
- Во кој интервал има најмногу ученици, а во кој најмалку?
- Бројот на ученици во секој интервал запиши го во проценти.
- Зошто висината од 145,56 cm не може точно да се појави меѓу дискретните податоци кои се запишани само во цели сантиметри?

3. Податоците од дадениот дијаграм на фреквенција претстави ги со табела на фреквенција за групирани податоци.



4. Дадени се податоците за возраста на луѓето во автобус од градскиот превоз.

2	11	21	79	32	42	63	51	59	43
55	63	13	50	22	57	25	29	32	58
38	45	51	67	16	61	43	57	60	51
8	55	37	59	35	56	59	33	28	30
40	53	49	74	18	48	19	26	78	62

- Претстави ги со табела на фреквенција со групирани податоци.
- Користејќи ја табелата одговори: Која возрасна група е најзастапена во градскиот превоз, а која најмалку?
- Според тебе, што би можела да е причината за таа возрасна група да е најзастапена во градскиот превоз?

Столбест и кружен дијаграм

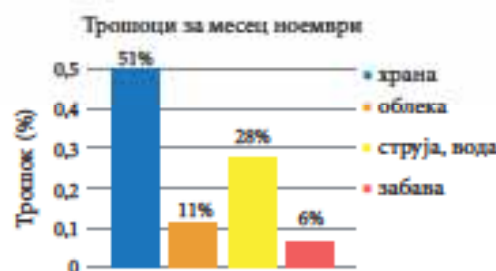
Дијаграмите се важна алатка за претставување на собраните податоци бидејќи овозможуваат поголема прегледност и јасност. При цртање дијаграм се користат линии, геометриски форми, слики и други елементи за да ги прикажеме податоците на разбирлив начин. Целта што треба да се постигне со секој дијаграм е тој да биде едноставен и јасен за сите што се заинтересирани за проблемот кој бил истражуван. Во оваа лекција ќе научиш како да ги претставуваш податоците на едноставен и визуелно привлечен начин со помош на кружен дијаграм, а потоа да ги анализираш и користиш според барањата.



Пример 1

Со столбест дијаграм е дадено како едно семејство ја распоредило заработувачката во месец ноември 2024 година.

- Според столбестиот дијаграм, за што најмногу, а за што најмалку потрошило семејството во ноември 2024 година?
- Дали може да се заклучи дека семејството заштедило во месец ноември 2024 година? Објасни го твојот одговор.



Решение:

- Според столбестиот дијаграм, семејството во месец ноември 2024 година најмногу потрошило за храна, а најмалку за забава.
- Според дијаграмот, вкупните трошоци се $51 + 11 + 28 + 6 = 96\%$, што значи семејството во месец ноември 2024 година заштедило 4% од својата вкупна заработувачка.

Задача 1

- Кој дивеч е најмногу уловен во 2023 година?
- Направи и други споредби.
- Кои други видови дивеч ги има во РС Македонија?



Пример 2

Во една паралелка од седмо одделение има 36 ученици, од кои 17 се девојчиња, а 19 се момчиња. Претстави ги податоците со кружен дијаграм.

Решение:

Според податоците, во примерот има две категории: момчиња и девојчиња. Значи, кружниот дијаграм ќе биде поделен на два дела (сектори). За да се определи големината на секој дел, прво ја одредувањ големината на аголот со кој се претставува еден ученик. Полниот агол од кругот 360° се дели со вкупниот број ученици ($19 + 17 = 36$), за кои се подготвува кружниот дијаграм за да определиме колкав централен агол одговара за 1 ученик, односно $360^\circ : 36 = 10^\circ$.

Деловите во кружниот дијаграм ќе ги имаат следните агли:

- За девојчиња $17 \cdot 10^\circ = 170^\circ$.
- За момчиња $19 \cdot 10^\circ = 190^\circ$.

Добиените централни агли ги цртаме во круг со произволен радиус, запишуваме наслов на дијаграмот и легенда која покажува како се означени претставените податоци.

Состав на паралелка



Пример 3

Во табела 1 е дадено како се распределени парите од лотаријата. Прикажи ги податоците со кружен дијаграм.

Табела 1: Распределба на парите од лотарија

	%
Држава	40
Награди	35
Комисии	10
Друго	15

Решение:

1. За да нацртаме кружен дијаграм кога податоците се дадени во проценти, прво треба да определиме колкав централен агол одговара на дадените проценти (види табела 1). На пример: $40\% \text{ од } 360^\circ = 0,4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$.
2. Потоа со агломер го цртаме секој агол во кружницата кој одговара за секоја од категориите (држава, награди, комисии и друго). На крај ги означуваме деловите на кругот (правиме легенда) и запишуваме наслов (име) на дијаграмот.

Табела 2: Пресметување на аголот за секоја категорија

	%	агол
Држава	40	$0,40 \cdot 360^\circ = 144^\circ$
Награди	35	$0,35 \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Комисии	10	$0,10 \cdot 360^\circ = 36^\circ$
Друго	15	$0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$

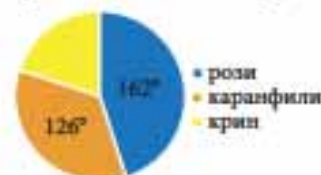
Распределба на парите од лотарија



Пример 4

Со кружниот дијаграм е дадена продажбата на 3 вида цвеќиња во цвеќарницата „Анемона“. Ако е познато дека се продадени вкупно 720 парчиња цвеќе, претстави ги податоците со табела.

Продадено цвеќе во цвеќарница



Решение:

Прво ја одредуваме големината на аголот што одговара на делот продадени кринови. Бидејќи целата кружница има 360° , имаме $360^\circ - 162^\circ - 126^\circ = 72^\circ$. Определуваме колкав централен агол одговара на 1 парче цвеќе. На вкупниот број од 720 цвеќиња одговара аголот од 360° . Значи за секое парче цвеќе одговара агол $360^\circ : 720 = 0,5^\circ$. За да определиме колкав е бројот на цвеќиња од секој вид цвеќе, го делиме соодветниот агол со аголот за 1 парче: број на продадени рози $162^\circ : 0,5^\circ = 324$, број на продадени каранфили $126^\circ : 0,5^\circ = 252$, број на продадени кринови $72^\circ : 0,5^\circ = 144$. Табелата ќе биде:

Табела 3. Продадени цвеќиња во цвеќарницата „Анемона“

Цвеќиња	Агол	Број на цвеќиња
Рози	162°	324
Каранфили	126°	252
Крин	72°	144

Постојат и други начини да се пресметаат вредностите за пополнување на табелата. Обиди се да го објасниш следниот: $162^\circ : 360^\circ = 0,45 = 45\%$; 45% од 720 е 324.

Задача 2

Уредниците на една локална телевизија сакаат да знаат каков е интересот за различни емисии на програмата. Во табела 2 се дадени податоците од истражувањето.

- Прецртај ја табелата во твојата тетратка.
- Претстави ги податоците со кружен дијаграм.

Табела 4: Временска застапеност на емисиите на програмата на една ТВ

	%	агол
Реклами	25	
Вести	15	
Музика	20	
Спорт	10	
Филмови	30	

Задача 3

По повод патрониот празник на училиштето, учениците учествувале во различни спортски активности. Резултатите од учеството се прикажани во следната табела:

Учество во училишни спортски активности

Спортска активност	Број на ученици
Фудбал	35
Кошарка	20
Трчање	25
Ракомет	15
Друго	25

Претстави ги податоците од табелата со кружен дијаграм, каде што покрај секој сектор ќе го запишеш соодветниот процент на ученици кои учествувале во одредена спортска активност.

Упатство:

1. Пресметај го вкупниот број на ученици што учествувале во спортските активности.
2. Пресметај го процентот на учениците што учествувале во секоја од споменатите активности.
3. Нацртај кружен дијаграм, при што секој агол во дијаграмот ќе биде со големина која одговара на процентот на учениците што учествувале во одредената активност.

Задача 4

Во една паралелка учениците пополниле анкета за своите омилен предмети. Податоците од анкетата се прикажани со дадениот столбест дијаграм.

Претстави ги податоците од столбестиот дијаграм со кружен дијаграм, каде што покрај секој сектор ќе го прикажеш и процентот на учениците што го избрале одредениот предмет како омилен.



Размисли за тоа како изборот на дијаграм (столбест или кружен) може да влијае врз начинот на кој луѓето може да ги разберат податоците. Кој тип дијаграм би го избрал за да претставиш податоци кои покажуваат делови од целина и зошто?

Одговори ги прашањата во твојата тетратка.

1. Дали можам да ги претставам податоците со соодветен тип дијаграм (столбест или кружен)?
2. Дали внимавам на точноста на пресметките и јасноста на приказот?
3. Во што би можел/а да се подобрам при следниот обид за претставување податоци со дијаграм?

Потоа, ако нешто не си сигурен/а, прегледај ја лекцијата и корегирај ги твоите знаења и вештини.

Самостојна работа

1. Организација која се занимава со истражувања во врска со животната средина дошла до податоци кои се запишани во дадената табела. Твоја задача е да одговориш на следните барања:

- Прецртај ја табелата во твојата тетратка и дополни ја.
- За кој производ се користат најмногу од сечените дрвја?
- Колкав дел од вкупно сечените дрвја се користи за сите производи?
- Претстави ги податоците со кружен дијаграм прикажувајќи ги соодветните % на секој сектор

За што се користат сечените дрва?	Потрошен дел од сечените дрвја	%
Огревно дрво	$\frac{1}{4}$	
Хартија	$\frac{1}{5}$	
Мебел	$\frac{3}{10}$	
Останато		

2. а) Информирај се колкава е редовната цена на опремата за излет во продавниците во твоето место на живеење и внеси ги во табелата која предходно ќе ја прецрташ во твојата тетратка.

Производи	Редовна цена	Намалена цена
Стол за сончање		
Масичка		
Стол		
Чадор		

- Ако има намалување на редовната цена за $\frac{1}{3}$, одреди ја намалената цена за секој производ и пополни ја табелата.
 - Податоците за редовната цена и податоците за намалената цена претстави ги со столбест дијаграм.
 - Колку денари ти се потребни за да ги купиш сите производи по нивната редовна цена, а колку по намалена цена?
3. Во табела 3 е дадено како Маја ги распоредила своите средства во месец мај 2024 година. Претстави ги податоците со кружен дијаграм.

Табела 3: Распределба на средствата на Маја за мај 2024

Распределба на парите	Денари	%	Агол
Кирија	6000		
Превоз	2000		
Храна	12000		
Друго	3000		
Заштеда	1000		

4. Анабела броела колку книги прочитал секој член од нејзиното семејство во еден месец:

- Татко ѝ: 5 книги
- Мајка ѝ: 8 книги
- Брат ѝ: 3 книги
- Сестра ѝ: 4 книги

Нацртај столбест дијаграм што ќе ги прикаже овие податоци.

5. Владимир анкетирал 40 ученици од училиштето за нивниот омилен спорт и добил:

- Фудбал: 16 ученици
- Кошарка: 10 ученици
- Одбојка: 8 ученици
- Пливање: 6 ученици

а) Прикажи ги податоците во табела.

б) Прикажи ги овие податоци со кружен дијаграм.

6. Следниот столбест дијаграм прикажува колку гласови добиле четири песни на училишниот натпревар за најдобра песна. Претстави ги податоците со кружен дијаграм.



7. Во едно училиште спровеле анкета за омилените вкусови на сладолед кај 120 ученици.

Добиените податоци се претставени со кружниот дијаграм.

а) Претстави ги податоците во табела.

б) Нацртај столбест дијаграм што ќе ги прикаже овие податоци.

Омилени вкусови на сладолед



Цртање и толкување на линиски дијаграм и пиктограм

Два едноставни и ефективни начини за визуелно претставување на податоци се линискиот дијаграм и пиктограмот. Линискиот дијаграм во шесто одделение го користеше за прикажување промени на податоците со текот на времето. Со поврзување на точките што ги претставуваат податоците можеше да го следиш трендот и да заклучиш дали некоја вредност се зголемува, се намалува или останува иста.

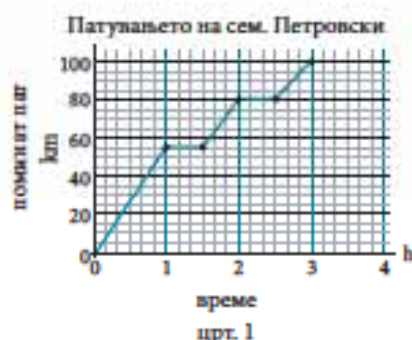
Во оваа лекција ќе се запознаеш со дијаграмот пиктограм и ќе научиш како да црташ и да ги толкуваш овие два вида дијаграми преку примери од секојдневниот живот.



Пример 1

Семејството Петровски патуvalo од градот А кон градот Б, кои биле на растојание од 100 km. На цртеж 1 е дадено растојанието што го поминале во дадено време. Најди го:

- растојанието поминато во првиот час
- растојанието поминато во вториот час
- вкупното поминато растојание
- вкупното време потрошено за одмор.



Упатство: г) Вкупното време потрошено за одмор е два пати по 30 минути, и тоа еднаш по еден час од тргнувањето и уште еднаш по вториот час. Значи, семејството Петровски одморило вкупно 1 час.

Пример 2

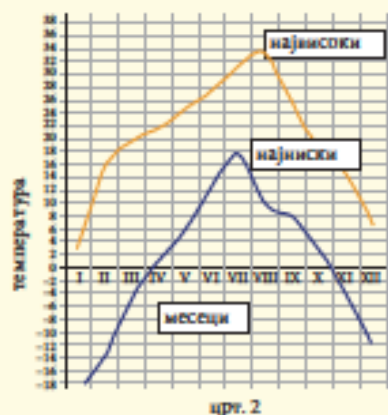
Да се прикажат графички податоците за највисоката и најниската просечна месечна температура во еден град, дадени во табелата 1.

Табела 1 – Највисока и најниска температура по месеци

месец	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
највисока забележана температура (°C)	5	18	22	24	27	30	34	36	28	21	17	9
најниска забележана температура (°C)	-18	-12	-3	3	8	15	20	12	10	5	-2	-10

Решение:

За да може графички да се прикажат овие податоци и да се воочат разликите меѓу највисоката и најниската температура, нема да биде доволен само првиот квадрант од координатниот систем. Затоа дијаграмите се нацртани во првиот и четвртиот квадрант. На овој начин со графичкиот приказ ќе имаме можност да ја воочиме и разликата меѓу највисоката и најниската просечна температура во дадениот град (црт. 2).

**Пример 3**

Промените на времето во текот на една недела биле забележувани и прикажани со пиктограм, а измерените температури во табела.

Пиктограм за времето по денови во една седмица

Понеделник	Вторник	Среда	Четврток	Петок	Сабота	Недела
☉	☉	☀	☀	☀	☉	☉

Табела – Температура по денови во една седмица

Ден	Температура (°C)
Понеделник	28
Вторник	30
Среда	25
Четврток	22
Петок	24
Сабота	29
Недела	31

Пиктограм е дијаграм кој користи симболи или слики за претставување на податоци, во кој секој симбол има одредена нумеричка вредност. Овој вид дијаграм е особено корисен за визуелна споредба.

- Според пиктограмот, кој ден бил врнежлив?
- Кој ден била измерена најниската температура?
- Кој ден бил најтопол?
- Дали секогаш кога има сонце температурата е иста? Објасни.

- д) Според податоците, нацртај линиски дијаграм што ќе ги прикаже температурите во текот на неделата.
- ѓ) Како се менувала температурата во текот на неделата? Дали можеш да препознаеш тренд (дали температурата растела, опаѓала или се менувала)?

Решение:

- а) Врнежлив ден е четврток бидејќи има симбол ☁ за дождливо време.
- б) Најниската температура е 22°C , измерена во четврток.
- в) Најтоплиот ден е недела, со температура од 31°C .
- г) Не, иако во потоплите денови има сонце (понеделник, вторник, сабота, недела), од пиктограмот се забележува дека и во понеделник исто така има сонце, но температурата е пониска отколку во други денови. Ова покажува дека освен сонцето, на температурата можат да влијаат и други фактори како ветерот или влажноста на воздухот.
- д) Линискиот дијаграм за температурата е даден на цртежот.
- ѓ) Температурата во вторник пораснала во споредба со понеделник. Во среда и четврток значително опаднала. Од петок до недела повторно растела, достигнувајќи највисока вредност во недела (31°C). Гледаме дека температурите не се постојани, туку се менуваат во текот на неделата.



Задача 1

Еден супермаркет ја следи продажбата на различни видови овошје во текот на една недела. Податоците за бројот на продадени килограми се прикажани со пиктограм, каде што секој од симболите: 🍎, 🍌, 🍌 одговара на 5 kg овошје.

Пиктограм за продажбата:

Понеделник	Вторник	Среда	Четврток	Петок	Сабота	Недела
🍌🍌🍌	🍌🍌	🍌🍌🍌	🍌🍌🍌	🍌🍌🍌🍌	🍌🍌🍌🍌	🍌🍌🍌🍌🍌

- а) Претстави ги податоците во табела.
- б) Кој ден се продале најмногу килограми овошје?
- в) Кој ден имало најмала продажба на овошје?
- г) Кој вид овошје се продавал најмногу во текот на неделата?
- д) Дали вкупната продажба на овошје во текот на неделата може да се прикаже со линиски дијаграм? Објасни го твојот одговор. Избери дијаграм со кој ќе ги прикажеш податоците.
- ѓ) Дали има денови со иста вкупна продажба на овошје? Кои се тие денови?
- е) Како се менувала продажбата на овошје во текот на неделата? Можеш ли да препознаеш некој тренд (дали продажбата растела, опаѓала или варираше)?

Пример 4

Учениците од едно училиште решиле да истражат колку време дневно поминуваат во различни активности во текот на една недела. Тие користеле пиктограм за да ги прикажат собраните податоци.

Пиктограм:  = 1 час

Активност	Пон.	Вто.	Сре.	Чет.	Пет.	Саб.	Нед.
Учење 	  	 	  	 	 		
Гледање ТВ 	 	 		 	  	   	  
Спорт  	 	 	 		  	  	 
Играње игри 	 	  		 	 	  	   

- Која активност е најзастапена во текот на неделата?
- Која активност има најмалку часови во текот на неделата?
- Во кој ден ученикот поминал најмногу време пред екран (гледање ТВ и играње игри)?
- Во кои денови ученикот поминал ист број на часови во учење?
- Нацртај пиктограм за вкупниот број часови поминати во секоја активност во текот на неделата, ако  = 2 часа.
- Анализирај: Дали времето поминато во учење и спорт е доволно во споредба со времето пред екран? Што би можело да се промени?
- Предложи нов неделен распоред во кој сите активности би биле подобро избалансирани.

Решение:

Прво, го пресметуваме вкупниот број часови за секоја активност во текот на неделата:

Активност	Пон.	Вто.	Сре.	Чет.	Пет.	Саб.	Нед.	Вкупно
Учење 	3	2	3	2	2	1	1	14 ч.
Гледање ТВ 	2	2	1	2	3	4	3	17 ч.
Спорт  	2	2	2	1	3	3	2	15 ч.
Играње игри 	2	3	1	2	2	3	4	17 ч.

- Гледање ТВ  (17 ч.) и играње игри  (17 ч.) се двете најзастапени активности.
- Учење  (14 ч.) е активност на која е посветено најмалку време.
- Во сабота (7 ч.) и недела (7 ч.).
- Понеделник и среда (по 3 ч.), вторник, четврток и петок (по 2 ч.), сабота и недела (по 1 ч.).

д) Пиктограм за вкупниот број часови во текот на седмицата:

Легенда  = 2 часа

Учење :        

Гледање ТВ :         

Спорт  :        

Играње игри :         

г) Времето поминато пред екран (34 ч.) е многу поголемо од времето за учење (14 ч.) и спорт (15 ч.). За подобар баланс, можно е да се намали времето за ТВ и игри и да се додадат повеќе активности на отворено или време за учење.

е) На пример:

Намалување на гледање ТВ  на 10-12 часа неделно.

Намалување на играње игри  на 10-12 часа неделно.

Зголемување на учење  на 16-18 часа.

Зголемување на спорт   на 18 часа за подобро здравје и активен живот.

Треба да знаеш како да го распределуваш своето време за да имаш подобар баланс помеѓу учење, рекреација и слободни активности. Оваа анализа преку пиктограм ти помага да ја разбереш важноста на времето и неговото управување.

Задача 2

Еден продавач на пазар продава различни видови овошје и води евиденција за бројот на продадени килограми секој ден во текот на една недела. Податоците се прикажани во следната табела:

Ден	Јаболка (kg)	Банани (kg)	Портокали (kg)	Грозје (kg)
Понеделник	10	8	4	8
Вторник	12	10	7	6
Среда	9	7	6	8
Четврток	16	12	8	9
Петок	14	10	6	10
Сабота	21	20	16	13
Недела	18	15	12	10

а) Кој вид овошје се продавал најмногу во текот на неделата?

б) Кој ден била најголемата продажба на овошје во целост?

в) Направи пиктограм каде што за вкупно продаденото овошје по денови ќе го користиш симболот  кој претставува 10 килограми?

г) Кој проблем ќе го имаше ако требаше да направиш пиктограм каде што секој симбол     претставува 10 килограми.

д) Кој вид овошје се продавало најмалку во текот на неделата?

е) Податоците претстави ги со кружен дијаграм (за секое овошје по денови или за вкупното овошје по денови).

ж) Што можеш да заклучиш за потрошувачките навики на луѓето? Во кој ден има најмногу купувачи и зошто?

Зошто пиктограмите се корисни за прикажување податоци во однос на други типови дијаграми? Во кои ситуации би било подобро да користиш линиски дијаграм наместо пиктограм?

Прецртај ја табелата во твојата тетратка и пополни ја.

Вештина	Целосно совладано ☑	Делумно совладано ⚠	Потребна ми е помош ✗
Цртам и толкувам пиктограм			
Цртам и толкувам линиски дијаграм			
Споредувам различни типови дијаграми			
Ги применувам дијаграмите во реални ситуации			

Кратко писмено размислување:

1. Напиши едно нешто што си го научил за пиктограмите и линиските дијаграми што ќе ти биде корисно во секојдневниот живот.
2. Кој дел од лекцијата ти беше најлесен, а кој ти беше најпредизвикувачки?

Самостојна работа

1. Една продавница за велосипеди води евиденција за бројот на продадени велосипеди во текот на шест месеци. Податоците се прикажани во следната табела:

Месец	Јануари	Февруари	Март	Април	Мај	Јуни
Велосипеди	12	18	25	30	50	60

- а) Со пиктограм прикажи ги податоците.
 - б) Анализирај ги податоците и објасни каков тренд се забележува.
 - в) Кој месец имало најголем раст на продажбата? Што мислиш, кои фактори би можеле да го предизвикаат овој раст?
 - г) Ако трендот продолжи, предвиди колку велосипеди би можеле да се продадат во јули.
2. Замисли дека треба да создадеш систем за следење на физичката активност на учениците во твоето училиште. Ќе ги собираш податоците за бројот на чекори што ги прават секој ден и ќе ги претставиш со пиктограм.
 - а) Предложи симболи за пиктограмот (на пример,  за 1000 чекори).
 - б) Осмисли начин на кој учениците ќе можат да ги бележат своите чекори и како тоа ќе се претвори во графички приказ.

- в) Направи пример на пиктограм за податоците од една недела за еден ученик.
- г) Размисли како би можел овој систем да ги мотивира учениците да бидат поактивни и предложи подобрувања.

3. Разгледај ја следната ситуација: една група на ученици сака да прикаже податоци за омилените спортови на своите соученици. Некои од нив одлучуваат да направат пиктограм, други избираат столбест дијаграм, а трети кружен дијаграм.

- а) Оцени кој тип дијаграм е најпогоден за оваа ситуација и зошто.
- б) Доколку треба да ги презентираш податоците на училишна приредба пред повеќе луѓе, кој дијаграм би го избрал и зошто?
- в) Дали има ситуации во кои пиктограмот не би бил најдобар избор? Објасни зошто.
- г) Направи критичка анализа на добрите и слабите страни на секој тип дијаграм во однос на читливост, точност и разбирливост на податоците. Може да користиш табела за да ги запишеш предностите и недостатоците за секој дијаграм.

4. Марија тренира атлетика и води евиденција за времето (во секунди) што ѝ е потребно да истрча 100 метри во текот на една недела. Нејзините резултати се запишани во табелата:

Ден	Понеделник	Вторник	Среда	Четврток	Петок	Сабота	Недела
Време (секунди)	18,5	18,3	18,0	17,8	17,5	17,4	17,2

- а) Претстави ги податоците со линиски дијаграм.
- б) Кој ден Марија имала најдобро време?
- в) Дали нејзиното време се подобрува со текот на неделата? Објасни.
- г) Меѓу кои два последователни дена има најголемо подобрување во времето?
- д) Каков тренд можеме да забележиме од овој дијаграм?
- е) Ако Марија продолжи да тренира со исто темпо, што можеме да очекуваме за нејзиното време во наредните денови?

Модална класа и дијаграм на фреквенција за групирани податоци

Во оваа лекција ќе научиш како да пронајдеш важни информации, како мода, медијана и ранг, кога податоците се групирани. Групирани податоци се оние што се средени во групи или интервали за да бидат појасни и полесни за анализа.

Во оваа лекција ќе научиш како од вакви податоци да извлечеш значајни информации што можеш да ги примениш во секојдневни ситуации. На пример, замисли дека си организатор на училиштен настан и треба да ја определиш најчестата големина на чевли на учениците за нарачка на соодветна опрема. Освен тоа, потребно е да ја знаеш средната големина и каков е опсегот на големини за да ги планираш нарачките.



Пример 1

Учениците од една паралелка сакаат да откријат која е најчестата висина во паралелката, како и да најдат средна вредност за висината. Тие собрале податоци за висината (во cm) на сите ученици во паралелката:

Собрани податоци за висина (во cm): 150, 155, 160, 165, 160, 170, 175, 160, 165, 155, 160.

Решение:

Мода (најчеста вредност): 160 cm.

Ранг (разлика меѓу најголемата и најмалата вредност): $175 - 150 = 25$ cm.

По подредувањето на податоците по големина: 150, 155, 155, 160, 160, 160, 160, 165, 165, 170, 175, вредноста која се наоѓа во средината (шестата висина) е 160 cm, па медијаната е 160 cm.

Дополнителна активност: Соберете податоци за друга карактеристика (на пр., големина на обувки) и сами пресметајте ги овие вредности.

Задача 1

Ана мерела колку време поминувале нејзините другарки гледајќи телевизија во работните денови попладне (во минути). Таа ги добила следните податоци: 30, 45, 60, 45, 30, 60, 45.

- Кој број на минути е најчест (која е модата)?
- Која е медијаната?
- Кој е рангот на податоците?

Пример 2

Учениците во една паралелка сакале да дознаат колку време обично им треба за да стигнат до училиште. За таа цел, тие спровеле анкета и ги забележале времињата (во минути) што им биле потребни за патување:

Собрани податоци (во минути):

6	10	12	15	18	20	20	20	22	25
30	23	11	27	24	29	16	28	25	11
14	16	27	6	13	24	19	7	17	22

- Претстави ги податоците во табела со групирани податоци.
- Опреди ја модалната класа.
- Опреди ја класата што ја содржи медијаната.

Решение:

- Ги групираме податоците во интервали со еднакви должини и ги претставуваме во табела:

Време (минути)	Број на ученици
6 – 10	4
11 – 15	6
16 – 20	8
21 – 25	7
26 – 30	5

Модална класа е интервалот со најголема фреквенција во групирани податоци.

- Модална класа е интервалот 16 - 20 минути, бидејќи има најмногу ученици (8 ученици).
- Класа што ја содржи медијаната е интервалот што ја содржи вредноста која е во средината ако податоците се подредат по големина. Во множеството од 30 податоци тоа ќе биде 15-тиот или 16-тиот податок, кој во овој случај се наоѓа повторно во класата 16 - 20 минути.

Модалната класа се користи кога податоците се групирани, а не како модата, која е конкретна вредност во негрупирани податоци.

Ако две или повеќе класи ја имаат истата најголема фреквенција, тогаш податоците имаат две (или повеќе) модални класи.

Пример 3

Учениците од библиотекарската секција правеле истражување за бројот на прочитани книги од училишната библиотека во текот на првото полугодие. Тие ги анкетирале своите соученици и ги добиле следните резултати: 0, 1, 2, 0, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 2, 2, 4, 6, 3, 3, 1, 4, 0, 3, 7, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 5.

- Изготви табела со групирани податоци.
- Нацртај дијаграм на фреквенција за групирани податоци.
- Толкувај ги резултатите:
 - Кој интервал има најголема фреквенција, односно во кој интервал најмногу ученици читаат книги?
 - Што ни кажува најчестата група за читањето на книгите од учениците?
 - Дали резултатите укажуваат на добра навика за читање или, пак, има простор за поттикнување на читањето? Објасни го твоето размислување.
- Анализа на посебни случаи:
 - Дали постои некоја изненадувачка информација во распределбата на податоците? На пример, дали има неочекувано мал број ученици што читаат многу книги или неочекувано висок број ученици што читаат мал број книги или воопшто не читаат?
 - Кој е твојот предлог за активности или мерки со кои би се подобриле навиките за читање, врз основа на анализата на овие податоци?

Решение:

а)	Број на прочитани книги	Број на ученици (фреквенција)
	0 – 1	8
	2 – 3	20
	4 – 5	10
	6 – 7	2

- Цртањето столбест дијаграм за групирани податоци е многу слично како за негрупирани, но сега секој столб одговара на еден интервал од табелата на фреквенција за групирани податоци. Сите столбови имаат иста ширина, а висината зависи од фреквенцијата на соодветната група податоци.

- Најголема фреквенција има интервалот со прочитани 2 до 3 книги, односно најголем дел од учениците прочитале 2 или 3 книги. Од дијаграмот тоа е највисокиот столб кој истовремено укажува на модалната класа. Кај поголемиот број прочитани книги фреквенциите се помали, па можеме да заклучиме дека резултатите укажуваат дека има простор за поттикнување на читањето.



- Ако ги споредиме висините на столбовите на столбестиот дијаграм (фреквенциите), лесно ќе воочиме дека има неочекувано мал број ученици што читаат голем број книги во споредба со учениците што прочитале една или не прочитале ни една книга.

Задача 2

Групирајте податоци за висина на ученици (во cm):

- Нацртај столбест дијаграм за групираните податоци.
- Одреди ја модалната класа.
- Определете ја класата во која се наоѓа медијаната.

Интервал (cm)	Фреквенција
150 – 154	3
155 – 159	7
160 – 164	10
165 – 169	5
170 – 174	2

Пример 3

Учениците од седмо одделение одлучиле да истражат колку чекори прават дневно во просек. Тие во текот на една недела ги броеле чекорите што ги прават секој ден и ги запишале податоците. За полесна анализа, одлучиле да ги групираат податоците во интервали:

Број на чекори дневно	Фреквенција (број на ученици)
2000 – 3999	4
4000 – 5999	6
6000 – 7999	10
8000 – 9999	8
10000 – 11999	5

- Кој интервал претставува модална класа на податоците?
- Што значи ова во однос на физичката активност на учениците?

Решение:

- Од табелата се гледа дека најголема фреквенција има интервалот 6000 – 7999 чекори (со 10 ученици). Модалната класа е 6000 – 7999 чекори дневно.
- Ова значи дека најголем број ученици во ова истражување дневно прават помеѓу 6000 и 7999 чекори. Според препораките за физичка активност, за здрав живот е добро учениците да прават најмалку 10000 чекори дневно. Овие податоци покажуваат дека поголемиот дел од учениците треба да се движат повеќе за да ја подобрат својата физичка активност.

Задача 3

Илир направил истражување за бројот на страници што учениците ги читаат за домашна работа во една недела. Собраните податоци ги групирал во интервали.

- Колку е вкупниот број на ученици од кои собрал податоци?
- Која е модалната класа?
- Донеси заклучок за навиките за читање на учениците.

Интервал (број на прочитани страници)	Фреквенција (број на ученици)
1 – 10	2
11 – 20	5
21 – 30	8
31 – 40	3
41 – 50	2

Задача 4

На час по физика учениците во седмо одделение извеле експеримент за да истражат како различните површини влијаат врз бројот на одбивања на топче при паѓање од висина од 1 метар. За секој од 20-те обиди, учениците го забележале бројот на одбивања на топчето. Резултатите (бројот на одбивања) се: 3, 4, 4, 5, 3, 3, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 4, 5.

- Претстави ги податоците со табела за групирани податоци (користи интервали 3-4, 5-6 одбивања).
- Нацртај дијаграм.
- Толкувај ги резултатите:
 - Одреди која е модалната класа и што укажува тоа за ефектот на површината врз одбивањата.
 - Објасни што може да значи ако некој интервал има значително помала фреквенција од друг.
 - Размисли како квалитетот на површината (на пример, мазна или груба) може да влијае врз бројот на одбивања.
 - Предложи мерки или дополнителни експерименти што би помогнале да се добие појасна слика за влијанието на различните типови површини врз одбивањата на топчето.

Дополнителен предизвик за експеримент:

Изведи експеримент во кој ќе се користат точно дефинирани површини (на пример, гума, пластика, метал) за да се измери бројот на одбивања на топчето на секоја површина. Анализирај ги резултатите за да утврдиш дали постои корелација помеѓу видот на површината и бројот на одбивања.

Доколку во една спортска секција спортистите се поделени според бројот на тренинзи неделно, а модалната класа е 5-6 тренинзи, што можеш да заклучиш за навиките на спортистите? Дали ова значи дека повеќето спортисти тренираат доволно, премногу или премалку? Како би го искористил овој податок за да ги подобриш спортските резултати на групата?

Прецртај ја табелата во тетратката и пополни ја. Дискутирај за твоите одговори со своите соученици.

Вештина	Целосно совладано	Делумно совладано	Потребна ми е помош
Групирање на податоци по интервали			
Цртање дијаграми на фреквенција			
Толкување на резултатите од дијаграмите			
Примена на наученото во секојдневни контексти			

Самостојна работа

1. Во музејот во твојот град е направена анкета за возраста на посетителите во текот на еден ден. Податоците се групирани во следниве интервали:

Возраст на посетителите во музејот

Интервал (возраст)	Фреквенција (број на посетители)
15 – 24	12
25 – 34	18
35 – 44	10
45 – 54	8
55 – 64	5

- Колку посетители имало во музејот тој ден?
- Колку е модалната класа?
- Што можеш да заклучиш од модалната класа?

2. Еден менаџер сакал да ја зголеми заработувачката на својата компанија, но знаел дека треба да вложи во маркетингот. По истражувањето за последните 15 месеци вложување средства во маркетингот, добиени се следните податоци:

Потрошени средства (денари)	Број на месеци
1 – 10000	1
10001 – 20000	2
20001 – 30000	4
30001 – 40000	7
40001 – 50000	1

- Нацртај дијаграм на фреквенција за групирани податоци
- Опреди ја модалната класа.
- Најди ја класата што ја содржи медијаната.
- Ако сака да го зголеми вложувањето во маркетинг за 15 %, според која мерка за средна вредност ќе треба да се одлучи, според модалната класа или според класата што ја содржи медијаната?

3. Во експеримент, група ученици садат 50 семки од ист вид растение во различни услови: соодветна влажност и недостиг на вода. По 30 дена тие ги мерат висините на растенијата и ги запишуваат резултатите во сантиметри.

Соодветна влажност:

12 15 12 13 14 9 16 18 20 21
 14 17 12 15 16 22 15 19 24 8
 17 13 14 9 16 18 20 21 9 20
 8 15 13 14 9 16 18 20 21 10
 10 9 12 16 19 8 16 17 24 21

Недостиг на вода:

7	9	12	11	10	9	15	8	6	19
4	8	14	15	7	10	12	19	3	11
17	13	9	5	11	6	4	13	9	2
15	13	10	6	9	8	15	20	13	8
9	9	7	13	18	8	6	10	22	5

- Групирај ги податоците по интервали од 5 cm и изработи дијаграм на фреквенција за секој услов.
- Толкувај ги резултатите и објасни какви влијанија имаат различните услови врз растот на растенијата.

Дополнителен предизвик: Направи свое истражување за влијанието на други фактори за раст на растенијата.

- Собери податоци за годишните врнежи од дожд во три различни географски региони: планински, приморски и низински. Групирај ги податоците по интервали од 100 mm и изработи дијаграми на фреквенција за секој регион. Толкувај ги резултатите, при што ќе објасниш како влијаат географските карактеристики врз количината на врнежи.

Процена и пресметка на аритметичка средина. Споредба на две множества на податоци

Замисли дека твојот омилен спортски тим одиграл неколку натпревари и ти сакаш да дознаеш колку поени во просек освојува по натпревар. Или можеби сакаш да споредиш кој од двајца спортисти е поконстантен во своите резултати. За опишување вакви ситуации, корисни се аритметичка средина, медијана, мода и ранг. Во оваа лекција ќе научиш како да процениш аритметичка средина од податоци прикажани со дијаграми, а потоа да ја провериш својата проценка со пресметување. Исто така,



ќе споредуваш две различни множества на податоци користејќи различни методи. Овие вештини ќе ти помогнат да анализираш информации и да носиш подобри одлуки во секојдневниот живот!

Пример 1

Во дадената табела е прикажано по колку книги прочитале 15 ученици во текот на летниот распуст:

- Која е модата за овие податоци?
- Опреди ја медијаната.
- Опреди го рангот на податоците.

Број на книги	Број на ученици
1	2
2	3
3	5
4	3
5	2

Решение:

Мода 3 (5 ученици прочитале по 3 книги), медијана: 3, ранг: $5 - 1 = 4$.

Задача 1

Амра ги мерела времињата на 40 нејзини другари кои учествувале во трка на 100 метри:

- Опреди ја модалната класа.
- Ако ги подредиме времињата, во кој интервал би била медијаната?

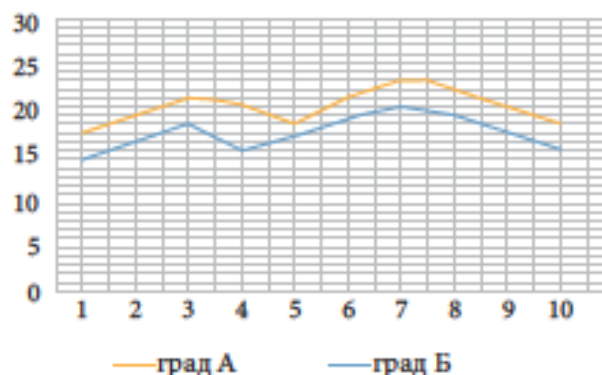
Време (секунди)	Број на ученици
12 - 14	4
15 - 17	10
18 - 20	15
21 - 23	8
24 - 26	3

Пример 2

На следниот линиски дијаграм се прикажани просечните дневни температури (во °C) во два различни града А и Б за 10 дена.

- Процени ја аритметичката средина за температурите во град А и град Б врз основа на дијаграмот.
- Пресметај ја точната аритметичка средина за секој град и спореди ја со твојата процена.
- Опреди ја медијаната за секој град.

Температури во два града



- г) Определи ја модата за секој град, ако постои.
 д) Определи го рангот на температурите за секој град.
 ф) Кој град има постабилни температури? Објасни го својот одговор врз основа на пресметаните вредности.

Решение:

- а) Процена на аритметичката средина

Град А: Вредностите се меѓу 18 и 24, па проценетата средина е околу 21 °C.

Град Б: Вредностите се помеѓу 15 и 21, па проценетата средина е околу 18 °C.

- б) Пресметка на аритметичката средина

Аритметичката средина е количник од збирот на сите податоци и бројот на собиорци. $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

$$\text{Град А: } \bar{X}_A = \frac{18+20+22+21+19+23+24+22+20+19}{10} = 20,8^\circ\text{C}$$

$$\text{Град Б: } \bar{X}_B = \frac{15+17+19+16+18+20+21+20+18+16}{10} = 18^\circ\text{C}$$

- в) Медијана:

$$\text{Град А: } 18, 19, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 24 \rightarrow \text{медијана} = \frac{20+21}{2} = 20,5^\circ\text{C}$$

$$\text{Град Б: } 15, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21 \rightarrow \text{медијана} = \frac{18+18}{2} = 18^\circ\text{C}$$

Бидејќи има парен број податоци, медијаната е аритметичка средина од двата средни податоци (оние што се наоѓаат на средина во подредената низа податоци).

- г) Мода

Град А: 19, 20 и 22 се појавуваат по два пати $\rightarrow$ мода = 19, 20 и 22 (ова е пример кога множеството на податоци има повеќе од една мода)

Град Б: 16, 18 и 20 се појавуваат по два пати $\rightarrow$ мода = 16, 18 и 20

- д) Ранг

$$\text{Град А: } 24 - 18 = 6^\circ\text{C}; \text{ Град Б: } 21 - 15 = 6^\circ\text{C}$$

- ф) Споредба на температурите во двата града

Град А има повисока аритметичка средина (20,8 °C наспроти 18,0 °C).

Град Б има пониски температури, но ист ранг на температурите (6 °C).

Промените во температурите се слични во двата града бидејќи вредноста на рангот им е иста.

Иако двата града имаат ист температурен ранг, Град А генерално има потопла клима.

Задача 2

Едно училиште спровело тестирање за медиумска писменост во 2 паралелки од 7 одделение. Од секоја паралелка по случаен избор биле тествирани по 10 ученици, а следната табела ги прикажува добиените резултати (поени од 0 до 10).

Табела: Резултати од тестот за медиумска писменост

Ученик	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 А	6	8	5	7	6	9	8	6	7	5
7 Б	7	6	9	8	6	5	9	7	6	8

- Процени ја аритметичката средина на резултатите за двете одделија.
- Пресметај ја точната аритметичка средина за секое одделение и спореди ја со твојата процена.
- Кое одделение има поголема медијана?
- Определи го рангот на резултатите за секое одделение.
- Кое одделение има порамномерна распределба на резултатите? Објасни.

Пример 3

Група ученици од седмо одделение направиле мерења на брзината на велосипедисти што возат на велосипедската патека покрај училишниот двор. Тие измериле брзини (во km/h) на 10 велосипедисти и ги организирале податоците во следната табела:

Велосипедист	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Брзина (km/h)	12	15	14	13	15	17	16	14	15	18

- Процени ја аритметичката средина на брзините на велосипедистите.
- Пресметај ја точната аритметичка средина на брзините.
- Определи ја медијаната на податоците.
- Кој податок е мода за дадените податоци?
- Определи го рангот на податоците.
- Ако максимално дозволената брзина на велосипедска патека е 15 km/h, колкумина велосипедисти ја надминале таа брзина?
- Што можеш да заклучиш за безбедноста на велосипедистите и другите учесници во сообраќајот врз основа на податоците?

Решение:

- Процена на аритметичката средина:
Брзините главно се движат од 12 до 18 km/h, а најчесто се околу 15 km/h.
Значи, проценетата аритметичка средина е околу 15 km/h.
- Пресметка на аритметичката средина:
$$\bar{X} = \frac{12+15+14+13+15+17+16+14+15+18}{10} = 14,9 \text{ km/h.}$$
- Медијана: Подредени брзини: 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 18
Средните две вредности се 15 и 15, па медијаната = $\frac{15+15}{2} = 15 \text{ km/h.}$
- Мода: Бројот 15 km/h се појавува најчесто (3 пати) значи модата = 15 km/h.
- Ранг: Ранг = 18 - 12 = 6 km/h.

- f) Брзини над дозволената граница (15 km/h):
Вредности над 15 km/h : 17 km/h , 16 km/h , 18 km/h .
Три велосипедисти ја надминале дозволената брзина.
- e) Заклучок за безбедноста:
Просечната брзина е $14,9 \text{ km/h}$, што е многу блиску до дозволената граница.
Три велосипедисти ја надминале дозволената брзина, што може да претставува потенцијален ризик. Можно е да се разгледаат мерки за подобрување на безбедноста, како што се поставување знаци за ограничување на брзината или подигнување на свеста за ризиците од пребрзо возење.

Задача 3

Група ученици во лабораторија по физика пуштаат топка од различни висини и го мерат времето на нејзиното паѓање. Експериментот го изведуваат во две различни средини: воздух и вода. Податоците од мерењата се прикажани со столбести дијаграми:



- Процени ја аритметичката средина на времето на паѓање во воздух и во вода врз основа на дијаграмите.
- Пресметај ја точната аритметичка средина за секој случај.
- Опреди ја медијаната на времето на паѓање за двете средини.
- Опреди го рангот на податоците за воздух и за вода.
- Користејќи ги добиените вредности, спореди ги двете средини. Како влијае средината врз времето на паѓање?

Набљудувани се временските услови во две различни области (планинска и рамнинска) во Северна Македонија во текот на една седмица. Во планинската област температурата е помала, а врнежите се почести, додека во рамнинската област температурите се повисоки, но врнежите се ретки. Како би ги анализирал/а податоците за температурата и врнежите во двете области во зависност од временските услови? Што од: аритметичка средина, медијана, мода би ги користел за да ја процениш разликата? Што би значело ако аритметичката средина за температурата во планинската област е пониска од таа во рамнинската, а количината на врнежи е поголема? Како ќе се одрази тоа врз животот на луѓето во овие области?

„Свезден водич“

Користи пет звездици за да го оцениш своето разбирање на лекцијата.



- Не разбирам ништо.
- Разбирам некои основни концепти.
- Ги разбираам повеќето работи, но има и нешто што не ми е сосема јасно.
- Ги разбираам повеќето работи и можам да им ги објаснам на други.
- Целосно го разбираам материјалот и можам да го применам во различни ситуации.

Запиши го бројот на звезди што сметаш дека го одразува твоето знаење на крајот од лекцијата и може да додадеш кратки коментари ако ти е потребна помош или ако имаш нешто што не ти е јасно.

Самостојна работа

1. Податоците за висина на растението папрат на неколку планини во Северна Македонија се прикажани на столбест дијаграм:

- а) Прогности ја аритметичката средина за висината на папратот.
- б) Пресметај ја точната аритметичка средина.
- в) Најди ранг, медијана и мода за висините на растението.



2. Со линискиот дијаграм се дадени податоци за менувањето на температурата на раствори во текот на изведување хемиска реакција.

- а) Прогности ја аритметичката средина за температурата на растворите.
- б) Пресметај ја точната аритметичка средина.
- в) Спореди ги резултатите за температурата на растворите користејќи ранг, медијана и мода. Каква е разликата меѓу највисоката и најниската температура?



3. Во две паралелки од едно училиште се измерени висините на неколку ученици. Податоците се прикажани во табелата подолу:

Ученици	Паралелка А (висина во см)	Паралелка Б (висина во см)
Ученик 1	150	155
Ученик 2	160	162
Ученик 3	155	160
Ученик 4	165	168
Ученик 5	158	154

- Процени ја аритметичката средина на висините за секое одделение.
- Кое одделение има поголема аритметичка средина?
- Спореди ги податоците за висината на учениците од двете паралелки користејќи ранг. Кој ученик и од која паралелка е највисок?
- Која паралелка има поголема медијана за висините?

4. Еден ученик мерел колку вода пиел секој ден во текот на една недела. Податоците се прикажани со линиски дијаграм:



- Процени ја аритметичката средина на количината вода што ја испил ученикот.
 - Провери ја процената со пресметување на точната аритметичка средина.
5. Тимови од две паралелки направиле анкета за бројот на часови што ги поминуваат учениците во учење секоја недела. Резултатите се прикажани во табелата:
- Спореди ги аритметичките средини на двата тима.
 - Кој тим има повеќе часови поминати во учење?

Тим	А	Б
Број на часа	4, 6, 7, 9, 10	3, 5, 7, 8, 6

6. Марта и Никола решавале задачи во текот на 4 дена. Податоците се прикажани во табелата:

Број на часови поминати во решавање задачи		
Име	Марта	Никола
Време (h)	3, 5, 2, 7	2, 6, 4, 8

- Користи ја медијаната за да го споредиш времето што секој од нив го поминал во решавање задачи.
- Кој од нив имал подолг просечен период на решавање задачи?

Исходи. Веројатност

Секој ден носиме одлуки и предвидуваме што може да се случи – дали ќе врне дожд, дали ќе победиме во некоја игра или дали при фрлање коцка ќе добиеме одреден број. Ова се примери на веројатност, која ни помага да разбереме колку е можно нешто да се случи. Во оваа лекција ќе научиш како да го користиш јазикот на веројатноста за да ги опишеш и толкуваш резултатите од различните настани.



Ќе научиш како да ги идентификуваш сите можни исходи на еден настан, како да ги класифицираш кога тие меѓусебно се исклучуваат и како да ја пресметаш веројатноста кога сите исходи се еднакви.

Пример 1

Замисли дека си на роденденска забава и дека ти е понудено да учествуваш во игра со коцка. На секоја страна на коцката има определен број точки (1, 2, 3, 4, 5 или 6).

Твоја задача е да предвидиш што ќе се случи врз база на овие информации:

- а) Кои се настани што сигурно ќе се случат, а кои е невозможно да се случат?
- б) Кои настани имаат иста веројатност да се случат?
- в) Дај пример на настани кои имаат различна веројатност да се случат.
- г) Кои се сите можни исходи при фрлањето на коцката?

Решение:

- а) Сигурен настан е дека на горната страна на коцката ќе се појават од 1 до 6 точки, а невозможно е да се појават повеќе од 6 или помалку од 1 точка.
- б) Еднакво е можно на горната страна на коцката да се појават парен или да се појават непарен број на точки.
- в) Настани што имаат различна веројатност да се случат се, на пример: на горната страна на коцката да се појават помалку од 2 точки или на горната страна на коцката да се појават повеќе од 2 точки.
- г) Можни исходи при фрлањето на коцката се: „На горната страна на коцката да се појави 1 точка“, „На горната страна на коцката да се појават 2 точки“, „На горната страна на коцката да се појават 3 точки“, „На горната страна на коцката да се појават 4 точки“, „На горната страна на коцката да се појават 5 точки“, „На горната страна на коцката да се појават 6 точки“.

Секој резултат на некое дејство или секој исход на некој експеримент се нарекува елементарен настан. Множеството од елементарни настани се нарекува настан.

Настаните што со сигурност можеме да ги предвидиме, бидејќи ни се познати сите причини за нивното појавување, ги нарекуваме сигурни настани. Настаните што никогаш не можат да се случат ги викаме невозможни настани.

Задача 1

Миле без гледање извлекува 1 чорап од фиоката. Ако се знае дека во неговата фиока има 10 чорапи, од кои 6 се црни, 2 сини и 2 зелени, одговори:

- Колку можни исходи има при вадење еден чорап од фиоката?
- Кои се можните исходи што меѓусебно се исклучуваат? Објасни ги.
- Кој е сигурен настан при извлекувањето чорап од фиоката на Миле, а кој невозможен?
- Дали е еднаква можноста Миле да извлече црн или зелен чорап? Дали е еднаква можноста да извлече син или зелен чорап? Објасни зошто.

Пример 2

Матеј и Софија играат игра со тркало на среќа. Тркалото е поделено на 4 црвени, 3 сини и 3 жолти полиња со еднаква големина. На него има стрелка, така што по завртувањето на тркалото стрелката покажува на некоја од боите.

- Наброј ги сите исходи што може да се добијат при вртење на тркалото?
- Колкава е веројатноста стрелката да застане на црвено поле?
- Колкава е веројатноста стрелката да застане на зелено поле?
- Колкава е веројатноста дека стрелката ќе застане на црвено или сино или жолто поле?
- Колкава е веројатноста стрелката да застане на сино или жолто поле?
- Кои се можните исходи што меѓусебно се исклучуваат? Објасни ги.

Веројатноста на настанот е бројна вредност која ја изразува шансата или можноста дека одреден настан ќе се случи. Тоа е број помеѓу 0 и 1, каде што 0 означува дека настанот е невозможен, а 1 дека настанот е сигурен.

Веројатноста на настанот се пресметува како односот на бројот на поволни исходи во однос на вкупниот број можни исходи во одреден експеримент,

ОДНОСНО: $\text{веројатност} = \frac{\text{број на поволни исходи}}{\text{вкупен број исходи}}$

Решение:

- а) Можни исходи при вртење на тркалото: „Стрелката застанува на црвено поле“, „Стрелката застанува на сино поле“ и „Стрелката застанува на жолто поле“.
- б) Веројатноста стрелката да застане на црвено:
Број на црвени полиња (поволни исходи) = 4
Вкупен број полиња = $4 + 3 + 3 = 10$
веројатност (црвено поле) = $\frac{\text{број на поволни исходи}}{\text{вкупен број исходи}} = \frac{4}{10} = 0,4(40\%)$
- в) Веројатноста стрелката да застане на зелено поле:
Број на зелени полиња (поволни исходи) = 0
веројатност (зелено поле) = $\frac{0}{10} = 0 \rightarrow$ невозможен настан
- г) Бидејќи настанот „Стрелката да застане на сино или црвено или жолто поле“ е сигурен настан, односно во секој случај стрелката ќе застане на поле со една од боите што ги има на тркалото, веројатноста е 1, односно:
веројатност (црвено или жолто или сино поле) = $\frac{4+3+3}{10} = \frac{10}{10} = 1(100\%) \rightarrow$ сигурен настан
- д) Веројатност стрелката да застане на сино или жолто поле:
Број на сини полиња = 3, број на жолти полиња = 3, вкупен број поволни исходи = $3 + 3 = 6$
веројатност (сино или жолто поле) = $\frac{6}{10} = 0,6(60\%)$
- ѓ) Исходи кои меѓусебно се исклучуваат се, на пример, стрелката истовремено да застане на сино и црвено поле (според дефинираните исходи, стрелката може да покажува само на едно поле).

Исходи кои се исклучуваат меѓу себе се исходите кои не можат да се случат истовремено.

Еднакво веројатни исходи се исходи кои имаат иста веројатност да се случат.

Задача 2

Во една кутија има 12 топки: 4 се црвени, 3 се зелени, 2 се жолти и 3 се сини. При едно извлекување се вadi само една топка од кутијата.

- а) Колку можни исходи има при вадење една топка од кутијата?
- б) Кои се можните исходи кои меѓусебно се исклучуваат? Објасни ги.
- в) Колкава е веројатноста да извлечеш зелена топка?
- г) Доколку извадиш топка и таа е жолта и не ја вратиш во кутијата, колкава е веројатноста да извадиш црвена топка?

Задача 3

Ана и Бојан играат игра со две коцки. Кога ќе ги фрлат двете коцки, ги собираат добиените броеви (број на точки кој се појавил на горната страна на коцката). Победник е оној што ќе добие збир 10 или поголем.

Ана вели: „Имам големи шанси да победам!“

Бојан вели: „Мислам дека е еднакво можно да добиеме збир 10 или не!“

- Кои можни суми можат да се добијат при фрлање на двете коцки?
- Колкава е веројатноста збирот да биде 10 или поголем?
- Дали Ана е во право дека има големи шанси да победи? Врз основа на одговорот под б, чие тврдење е точно?

Пример 3

Марко наутро гледа временска прогноза која покажува дека постои 0,7 (70 %) веројатност за дожд во текот на денот. Тој размислува: „Дали да земам чадор со мене или не?“

Неговиот другар Виктор му вели: „Не земај чадор, има 30 % шанса да не врне!“

- Како да ја разбереме веројатноста 0,7 за да заврне дожд?
- Колкава е веројатноста да не врне?
- Што би му советувал ти на Марко – да земе чадор или не?

Решение:

- Веројатноста за дожд е 0,7 (70 %), што значи дека шансите да врне се поголеми.
- Овие два исходи се исклучуваат, па веројатноста да НЕ врне е $1 - 0,7 = 0,3$ (30 %), што значи дека е помала шанса да остане суво.
- Веројатноста за дожд е поголема од 50 %, што значи дека е попааметно Марко да земе чадор!

Што научи со примерот?

- Веројатноста ни помага да донесуваме подобри одлуки во секојдневието.
- Мал ризик (како во примерот за носење чадор) може да ни помогне да избегнеме голем проблем (да се наводениме).

Кога шансите за појавување на настан се поголеми од 50 %, тогаш настанот се смета за веројатен. Ова значи дека веројатноста на настанот е поголема од 0,5, што укажува на тоа дека настанот има поголема шанса да се случи отколку да не се случи.

Задача 4

Марко и Јована играат игра со две различни коцки. На секоја коцка се обележани броеви од 1 до 6. Секој од нив ги фрла истовремено двете коцки. Кој има поголема веројатност да победи ако: Марко при фрлањето на двете коцки треба да добие збир поголем од 7, а Јована збир помал или еднаков на 7?

Во кои ситуации во секојдневието користиме веројатност за донесување одлуки? Дали можеш да дадеш примери?

Доколку во едно училиште има 0,8 веројатност дека наскоро ќе се одржи натпревар по математика, како би ја протолкувал таа информација? Дали треба да се подготвиш?

Во тетратка препиши ја и пополни ја табелата.

Тврдења	Не можам	Можам делумно	Можам целосно
Одредувам веројатност врз основа на еднакво веројатни исходи во едноставни проблеми.			
Можам да користам броеви од 0 до 1 за да опишам веројатност.			
Можам да ги идентификувам сите можни исходи кои меѓусебно се исклучуваат кај еден настан.			
Можам да дадам пример од реалниот живот каде што веројатноста ми помага да донесам одлука.			

Самостојна работа

- а) Колкава е веројатноста при фрлање коцка за играње на горната страна на коцката да е парен број, а колкава е веројатноста да е непарен број?
 б) Дали настаните „На горната страна на коцката се појавиле 1 или 2 точки“ и „На горната страна на коцката се појавиле 5 или 6 точки“ имаат иста веројатност да се случат? Објасни.
 в) Кој настан има поголема веројатност: „На горната страна на коцката се појавиле парен број точки“ или „На горната страна на коцката се појавиле најмалку 2 точки“?
- Избери број по случаен избор помеѓу 1 и 10.
 а) Колку можни исходи има?
 б) Дали има еднаква веројатност да се избере парен или да се избере непарен број?
- Избери број по случаен избор помеѓу 1 и 25.
 а) Колку можни исходи има?
 б) Колкава е веројатноста да се одбере прост број?
 в) Наведи пример на исходи кои заемно се исклучуваат.
 г) Дали исходот „Избран е непарен број“ го исклучува исходот „Избран е прост број“?

4. Играш игра со фрлање коцка. Ако по фрлањето на горната страна на коцката се појават 6 точки, освојуваш награда. Ако пак на горната страна се појави број на точки помал од 6, губиш.
- Кој е односот на веројатностите за победа и пораз?
 - Дали оваа игра е фер? Објасни зошто.
 - Ако организаторот сака да ја направи играта пофер, како може да го промени правилото?
5. Во еден танцов клуб членуваат 50 члена. Членовите тренираат според возраста, млади до 18 години и возрасни над 18 години. Во табелата е дадено по колку члена има според пол и возраст.

Табела - Бројот на членови во клубот според пол и возраст.

	Младо лице	Возрасно лице
Жени	15	10
Мажи	12	13

Ако случајно се избере еден член, колкава е веројатноста тој да биде:

- а) жена б) возрасен маж в) младо лице г) млада жена

Експериментална и теоретска веројатност

Во оваа лекција ќе се запознаеш со поимот експериментална веројатност, како и со начинот на нејзино пресметување. Ќе можеш да ги воочиш разликите помеѓу експерименталната и теоретската веројатност и да правиш споредба во едноставни ситуации. Исто така, кога ќе собереш податоци при изведување некој експеримент, ќе научиш како да ги искористиш за да ја пресметаш веројатноста за настаните што се случиле, а потоа ќе можеш да ги споредиш со теоретските процени.



Ова знаење ќе ти помогне да разбереш како функционираат веројатностите и да научиш како да ги користиш во реалниот живот.

Пример 1

Во кутија има 4 топки во различни бои: црвена, жолта, зелена и сина. Ти треба да извлекуваш по една топка од кутијата.

- Која е веројатноста дека извлечената топка е црвена?
- Која е веројатноста дека извлечената топка е жолта?
- Која е веројатноста дека извлечената топка е зелена?
- Која е веројатноста дека извлечената топка е сина?

Решение:

Бидејќи во кутијата има 4 топки и од секоја боја има по 1 топка, сите исходи се еднакво веројатни и тие меѓусебно се исклучуваат. Веројатноста за секој исход е $\frac{1}{4}$.

Задача 1

На полицата во собата на Јована има 3 книги поезија, 5 книги трилер и 7 книги стручна литература. Јована сака да чита трилери. Пресметај ја веројатноста дека со едно извлекување од полицата без гледање Јована ќе го погоди својот читателски вкус?

Пример 2

Во кутија има 3 црвени топки и 2 зелени топки. Извлекуваш една топка без да гледаш.

- Пресметај ја теоретската веројатност за извлекување црвена топка.
- Изведи експеримент: извлечи 10 пати по една топка од кутијата со враќање и запиши ги резултатите.
- Пресметај ја експерименталната веројатност за извлекување црвена топка според резултатите од експериментот.
- Спореди ги теоретската и експерименталната веројатност.

Решение:

- а) Теоретска веројатност = $\frac{\text{број на поволни исходи}}{\text{вкупен број исходи}}$

Број на поволни исходи е 3 бидејќи во кутијата има 3 црвени топки, додека вкупен број на исходи е 5 (вкупен број на топки во кутијата).

Значи теоретска веројатност (црвена топка) = $\frac{3}{5} = 0,6(60\%)$.

- б) Со изведувањето на експериментот нека сме ги добиле следните резултати при извлекувањето топка 10 пати без гледање и со враќање на извлечената топка во кутијата:

Извлекување	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Топка/боја	црвена	зелена	црвена	црвена	зелена	црвена	црвена	црвена	зелена	црвена

Значи, од сите 10 извлекувања 7 пати била извлечена црвена топка.

$$\text{Експериментална веројатност} = \frac{\text{број на успешни исходи во експериментот}}{\text{вкупен број обиди}}$$

- в) Според добиените резултати од експериментот, имаме 7 успешни исходи од вкупно 10 обиди, односно експериментална веројатност $= \frac{7}{10} = 0,7 (70 \%)$
- г) Споредба на теоретската и експерименталната веројатност:
Во овој пример теоретската веројатност е 0,6, додека експерименталната веројатност е 0,7.
Иако експерименталната веројатност е малку поголема од теоретската, тоа е сосема во ред. Тоа е поради фактот што експериментите можат да даваат различни резултати секојпат кога се изведуваат. Со зголемување на бројот на извлекувања, вредноста на експерименталната сè повеќе ќе се доближува до вредноста на теоретската веројатност.

Кога би го повториле експериментот 20, 30, 40... пати, би добивале различен број на успешни исходи, но количникот меѓу успешните исходи со вкупниот број на обиди ќе биде вредност блиска до теоретската веројатност, односно 0,6.

Задача 2

Играј игра со коцка која на секоја страна има различен број точки: 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

- Пресметај ја теоретската веројатност дека по едно вртење на коцката на горната страна ќе се појави бројот 3.
- Изведи експеримент: фрли ја коцката 20 пати и запиши ги резултатите.
- Пресметај ја експерименталната веројатност на горната страна на коцката да има 3 точки според резултатите од експериментот.
- Спореди ги теоретската и експерименталната веројатност.

Пример 3

Лена и нејзините пријатели се натпреваруваат во фрлање паричка. Натпреварот се состои од 50 фрлања на паричката. Лена сака да ја пресмета веројатноста да ѝ падне „писмо“ по 50 фрлања на паричката и да ја спореди таа веројатност со теоретската веројатност.

- Пресметај ја теоретската веројатност да падне „писмо“ при едно фрлање на паричка.
- Лена ја фрла паричката 50 пати. Во резултатите добива 22 пати „писмо“ и 28 пати „грб“. Пресметај ја експерименталната веројатност да падне „писмо“.
- Спореди ги теоретската и експерименталната веројатност.

Решение:

- а) Паричката има два еднакво веројатни исходи: „грб“ или „писмо“. Тогаш теоретската веројатност за да падне „писмо“ е $\frac{1}{2} = 0,5$.
Теоретската веројатност да падне „грб“ при едно фрлање е 0,5 или 50 %.
- б) Лена ја фрлила паричката 50 пати и добила 22 пати „писмо“ и 28 пати „грб“
експерименталната веројатност да падне „писмо“ е $\frac{22}{50} = 0,44$ или 44%.
- в) Споредба на теоретската и експерименталната веројатност:
- Теоретската веројатност е 0,5 или 50 %.
 - Експерименталната веројатност е 0,44 или 44 %.

И овде важи забелешката како во пример 2 за вредноста на експерименталната и теоретската веројатност (разликата е резултат на случајноста која се јавува при ограничен број на фрлања).

Задача 3

Сопственикот на една живинарска фарма има 100 кокошки. 80 од нив несат бели јајца, а 20 несат кафеави. За да утврди колку јајца во просек ќе има од секој вид, фармерот одлучува да направи експеримент.

Фармерот прави 5 различни извлекувања (тестови) за да види колку често ќе извлече кокошки што носат бело јајце. Во секој од овие тестови тој извлекува 10 кокошки, набљудува какви јајца ќе снесе секоја и ги запишува резултатите.

Еве како изгледа неговиот експеримент:

Прво извлекување на 10 кокошки: резултатот е 8 од нив несат бели јајца и 2 несат кафеави;

Второ извлекување: 7 бели јајца и 3 кафеави;

Трето извлекување: 9 бели јајца и 1 кафеаво;

Четврто извлекување: 8 бели јајца и 2 кафеави.

Петто извлекување: 6 бели јајца и 4 кафеави.

По овие 5 различни теста, фармерот ги сумира сите резултати за бели и кафеави јајца и ги користи за да ја пресмета експерименталната веројатност.

- а) Пресметај ја теоретската веројатност да се извлече кокошка што ќе снесе бело јајце и теоретската веројатност да се извлече кокошка што ќе снесе кафеаво јајце.
- б) Пресметај ја експерименталната веројатност по секои 5 теста.
- в) Анализирај ги и спореди ги резултатите на теоретската и експерименталната веројатност. Објасни каква би била веројатноста за извлекување на кокошка која ќе снесе кафеаво јајце и зошто.

Што би се случило ако фармерот направи 100 обиди наместо само 5? Како би се променил резултатот во споредба со теоретската веројатност од 80 % за бело јајце?

Процени ја својата работа, размисли за тоа што научи и како го примени поимот веројатност.

1. Мојам ли да ги објаснам разликите помеѓу овие два типа веројатност? (Да/Не)
2. Кога ја пресметувам експерименталната веројатност, мојам ли да ја споредам со теоретската? (Да/Не)
3. Дали ја знам врската на бројот на обиди што ќе ги направам при експерименталната веројатност со вредноста на теоретската веројатност? (Да/Не)
4. Дали подобро ги разбираам принципите на веројатноста по оваа лекција? (Да/Не)

Ако одговори со „Да“ на повеќето прашања, тоа значи дека успешно ја разбра и примени лекцијата. Ако имаш повеќе „Не“ одговори, размисли за тоа што не ти е јасно и посвети време на повторување на тие делови од лекцијата.

Самостојна работа

1. Марко игра игра со коцка со броеви од 1 до 6. Тој ја фрла коцката 20 пати. За време на обидите ги добил следните резултати:
Една точка на горната страна на коцката: 3 пати,
2 точки: 4 пати,
3 точки: 5 пати,
4 точки: 4 пати,
5 точки: 2 пати,
6 точки: 2 пати.
 - а) Пресметај ја веројатноста за секој број точки да се појави на горната страна при едно фрлање на коцката.
 - б) Пресметај ја веројатноста за секој број базирано на податоците од експериментот.
 - в) Спореди ги веројатностите од а) и б). Што заклучуваш?
2. Марија 10 пати фрлила монета. Притоа, во 6 случаи на горната страна на монетата се појавило „писмо“, а во 4 случаи „грб“.
 - а) Пресметај ја веројатноста при едно фрлање на горната страна на монетата да се појави една од страните „писмо“ и „грб“.
 - б) Пресметај ја веројатноста за појавување на секоја страна на монетата според резултатите од фрлањето на Марија.
 - в) Спореди ги веројатностите. Објасни зошто се јавува таа разлика?

- 
3. На автомат за кафе има три опции: макијато, еспресо и капучино. Претпостави дека сите опции се еднакво веројатни.
- Пресметај ја теоретската веројатност за секоја опција (како дробка и процент). Во последните 100 избори од автоматот, макијато е избрано 40 пати, еспресо 30 пати, а капучино 30 пати.
 - Пресметај ја експерименталната веројатност за секоја опција (како дробка и процент).
 - Спореди ги теоретските и експерименталните веројатности. Дали експерименталните се приближуваат кон теоретските? Објасни накратко.
4. Наташа се подготвува за излегување со пријателите. Во својот шкаф има повеќе парчиња облека во 3 различни бои: 2 црвени, 3 зелени и 5 жолти. Наташа не може да се одлучи за бојата и избира без гледање во шкафот.
- Пресметај ја теоретската веројатност за да ја избере секоја од боите на облека.
 - Направи експеримент така што 20 пати ќе извлекуваш. По секој избор парчето облека се враќа во шкафот. Пресметај ја експерименталната веројатност. (Направи симулација со извлекување ливчиња од кутија на кои е запишана бојата на облека)
 - Спореди ги теоретската и експерименталната веројатност и размисли за разликите меѓу веројатностите.
5. Истражувај како и колку се вклучени експерименталната и теоретската веројатност при подготовка на временската прогноза.

